

**Российский фонд фундаментальных исследований
ФГУ ФНЦ «Научно-исследовательский институт системных
исследований РАН»
ПАО «Сургутнефтегаз»
Сургутский институт нефти и газа
(филиал ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный
университет»)**

**Международная конференция «Математика и
информационные технологии в нефтегазовом
комплексе», посвящённая дню рождения великого
русского математика академика П. Л. Чебышёва**

Труды конференции

**INTERNATIONAL CONFERENCE
«Mathematics and Informational Technologies for Oil
and Gas Industry»**

Proceedings

Сургут — 2019

УДК 51(063)+53(063)+622.3(063)+004(063)+658:622.3(063)
ББК 22+32.97+65.304
М 431

Печатается по решению
Оргкомитета конференции

Редакционная коллегия:

академик В.Б. Бетелин;
В.А.Галкин, д.ф.-м.н., профессор (отв.редактор);
Р.Д. Гимранов; Т.В. Гавриленко, к.т.н.; Д.А.Моргун, к.ф.-м.н., доцент.

Международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвящённая дню рождения великого русского математика академика П. Л. Чебышёва : Труды конференции. / (Обнинск, 14 – 19 мая; Сургут, 23 мая 2019 г.): Труды конференции. Под ред. акад. В.Б. Бетелина. — Сургут: Издательство ООО «Порто-принт», 2019. — 331 с.

ISBN 978-5-91867-192-4

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-07-20069

УДК 51(063)+53(063)+622.3(063)+004(063)+658:622.3(063)
ББК 22+32.97+65.304

ISBN 978-5-91867-192-4

© Авторы, 2019
© Компьютерная верстка – Д.А. Моргун, 2019
© ООО «Порто-принт», 2019



Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894)

Программный Оргкомитет:

Председатель оргкомитета: академик В. Б. Бетелин

В. Б. Бетелин, академик РАН, научный руководитель Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», Москва

Сопредседатели оргкомитета:

В. А. Галкин, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель обособленного подразделения Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» в г. Сургуте.

Р. Д. Гимранов, начальник управления ИТ ПАО «Сургутнефтегаз».

Члены оргкомитета:

Г. И. Савин, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

С. Е. Власов, доктор технических наук, временно исполняющий обязанности директора Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»

Н. Н. Смирнов, профессор, заместитель директора Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» по стратегическим информационным технологиям, д.ф.-м.н.

Р. М. Шагалиев, профессор, заместитель директора федерального государственного унитарного предприятия «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики», Россия

В. Н. Чубариков, профессор, декан механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

М. М. Лаврентьев, профессор, декан факультета информационных технологий, Новосибирский государственный университет.

А. Пападопулос, директор национального центра научных исследований, Институт математики, Университет Страсбурга (Франция).

С. О. Старков, начальник отделения Института интеллектуальных кибернетических систем Национального исследовательского ядерного университета — МИФИ, д-р физ.-мат. наук, профессор

В. П. Гинкин, доктор физико-математических наук, профессор, Физико-энергетический институт им. А. И. Лейпунского, г. Обнинск Калужской обл.

Локальный Оргкомитет:**Председатель — В. А. Галкин**

В. А. Галкин, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель обособленного подразделения Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» в г. Сургуте.

Заместитель председателя локального оргкомитета:

Р. Д. Гимранов, начальник управления ИТ ПАО «Сургутнефтегаз».

Члены локального оргкомитета:

С. О. Старков, профессор, начальник отделения
Института интеллектуальных кибернетических систем Национального
исследовательского ядерного университета – МИФИ.

В. П. Гинкин, доктор физико-математических наук, г. Обнинск,
Р. Я. Гусар, генеральный директор ООО «УК «Индустриальный парк — Югра»,

Р. Р. Айсин, генеральный директор компании «Новые бизнес технологии»,

А. В. Галкин, кандидат физико-математических наук,

Т. В. Гавриленко, кандидат технических наук,

А. А. Егоров, кандидат технических наук,

Д. А. Моргун, кандидат физико-математических наук,

А. В. Гореликов, кандидат физико-математических наук, доцент,

С. Г. Еловый,

И. В. Бычин,

И. П. Деркач.

СОДЕРЖАНИЕ

Академик Пафнутий Львович Чебышёв	11
Бетелин В. Б.	
О новой экономике, в которой победитель забирает все	14

Доклады в Обнинске

Бетелин В. Б., Галкин В. А., Шпильман А. В., Смирнов Н. Н.	
Цифровой симулятор движений флюида в керне – перспективная технология при разработке и добыче трудноизвлекаемых запасов нефти	18
Шпильман А. В.	
Прогнозы развития и глобальные вызовы нефтяной отрасли мира	29
Галкин В. А.	
Геометрические задачи моделирования порового пространства	30
Якобовский М. В.	
Отказоустойчивость суперкомпьютерных вычислений	34
Губайдуллин А. А., Игошин Д. Е., Губкин А. С.	
Компьютерные модели пористой среды для вычисления её фильтрационно-ёмкостных параметров	35
Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В.	
Алгоритм решения начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре	40
Гавриленко Т. В.	
Подходы для описания и моделирования сложных биологических систем	41
Панфёров С. В.	
Обобщенный приведенный метод Ньютона решения задачи нелинейной оптимизации	50
Кушниренко А. Г., Леонов А. Г.	
Роль программирования в непрерывном курсе информатики	55
Нестеров А. В.	
Асимптотика решения начальной задачи для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой взаимной диффузией	57
Крыганов П. В., Вольпин С. Г., Афанаскин И. В., Штейнберг Ю. М., Ялов П. В.	
Особенности математических моделей для интерпретации гидродинамических исследований горизонтальных скважин	62

Деев Г. Е., Ермаков С. В.	
Определение производной произвольного порядка с помощью гиперчисел	67
Звягин А. В., Лужин А. А., Шамина А. А.	
Трёхмерный метод разрывных смещений в линейной механике разрушения	76
Ли Кайжуй, Киселев А. Б.	
Одно аналитическое решение о раскрытии трещины гидравлического разрыва с учетом неоднородного внутреннего давления	90
Косинов С. Н., Никитин В. Ф., Тюренкова В. В., Смирнова М. Н.	
Математическое моделирование воздействия электромагнитного высокочастотного излучения на подвижный проводящий экран	101
Скрылева Е. И., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н., Душин В. Р.	
Моделирование использования химического реагента для интенсификации просачивания нефти	115
Скрылева Е. И., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н.	
Моделирование фильтрационных течений в пористых средах в условиях микрогравитации с учётом инерционных эффектов	125
Мелкумян Л. А., Логвинов О. А.	
Полимерное заводнение как метод увеличения нефтеотдачи	126
Михальченко Е. В., Никитин В. Ф.	
Численное трехмерное моделирование вращения детонационной волны в двигателе	137
Тюренкова В. В., Стамов Л. И.	
Распространение пламени по поверхности материала в потоке окислителя	139
Иванченко О. В.	
Обнаружение перестройки временного ряда с помощью геометрических мер	140
Перегуда А. И.	
Оценка вероятности пересечения заданного уровня процессом функционирования изделия в виде границ Чернова	141
Пестов Д. А., Смирнова М. Н., Никитин В. Ф., Тюренкова В. В., Zuojin Zhu	
Вычислительное моделирование движения транспорта по многополосной магистрали, с учетом различных мотиваций к перестроению	147
Пестов Д. А., Акулич А. В.	
Зависимость роста трещины гидроразрыва от параметров закачки	163
Никитин В. Ф., Михальченко Е. В., Стамов Л. И.	
Численное исследование детонационных двигателей	168

Пленарные доклады в Сургуте

Ильин В. П.	
Об интегрированном вычислительном окружении для нефтегазовой отрасли	181
Кутрунов В. Н., Исафилова А. И.	
От информационного взрыва к индивидуальным образовательным траекториям	181

Секция «Вычислительная математика и математическое моделирование»

Быковских Д. А., Галкин В. А.	
Моделирование течения идеального бесстолкновительного газа в пористой среде методом Монте-Карло	185
Бетелин В. Б., Галкин В. А., Моргун Д. А., Дубовик А. О., Девицын И. Н.	
Несеточный метод решения нелинейных систем ОДУ	188
Бычин И. В., Гореликов А. В.	
Численное решение уравнения индукции в задачах течения проводящей жидкости	193
Галкин В. А., Дубовик А. О.	
Моделирование слоистого течения жидкости в переменной во времени области .	197
Галиев И. М.	
Моделирование свойств материала из анализа его микроструктуры в ANSYS . . .	200
Самарина О. В., Семенов С. П., Славский В.В.	
Применение теории три-ткани при разработке методов анализа и обработки данных дистанционного зондирования Земли	204
Соколов С. Б.	
О Парадоксе Даламбера-Эйлера	206
Дубовик О. А., Дубовик А. О.	
Группа МН(2) движений псевдоевклидовой плоскости и связанные с ней специальные функции	210
Моргун Д. А., Девицын И. Н.	
Отечественная вычислительная техника архитектуры MIPS	217
Штанов Ю. Н., Зиганшин Р. А.	
Программный комплекс для генерирования учебно-методических комплексов с использованием Django	221
Назин А. Г.	
Построение конформной проекции Чебышева территории Ханты-Мансийского автономного округа	223
Гавриленко А. В.	
О классификации осцилляций для моделирования в биомеханических системах .	225
Бурькин Ю. Г., Деркач И. П.	
Применение систем распознавания образов для регистрации линейных движений биомеханических систем	229
Бычин И. В., Ряховский А. В.	
Численное моделирование естественной конвекции во вращающихся сферических слоях с использованием графических ускорителей	236
Заикин П. В., Лысенкова С. А., Еловой С. Г.	
Комбинированный алгоритм поиска корней полинома	238
Лысенкова С. А., Еловой С. Г.	
Математическая модель оптимизации процесса гидрокрекинга парафинов	240
Гореликов А. В.	
Об одном точном решении задачи диффузии магнитного поля в шаре	243
Бурькин Ю. Г., Брагинский М. Я.	
Идентификация параметров нейронной сети при построении модели мануальных движений человека	248
Иванов Ф. Ф.	
Роль, место, значение и перспектива применения процесса моделирования в наиболее результативных проектах создания автоматизированных систем	254

Галкин В. А., Ладыгин Н. И.	
Моделирование процесса коагуляции с источником на основе уравнения Смоу-ховского со стоком	260
Гришмановский П. В., Гришмановская О. Н.	
Тенденции распространения массовых открытых онлайн курсов и открытость дан-ных	261
Головина Н. Я.	
Алгоритм решения обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, как модели пластичного материала	263
Головина Н. Я.	
Модели пластичных материалов и их ресурса	267

Секция «Механика композитных материалов и конструкций»

Горынин Г. Л.	
Проблемы и методы механики композитных конструкций	274
Немировский Ю. В.	
Предельное состояние гибридных кольцевых пластин	277
Исрафилова А. И., Кутрунов В. Н.	
Numerical Modeling of the Composite Structure of Pneumatic Tires Using Isogeometric Analysis	281
Прищепа И. А., Горленко Н. П., Саркисов Ю. С.	
Механические свойства композита на основе цементного камня и минерально-органического наполнителя	283
Михеев П. В., Мостовой Г. Е., Конюшенков А. А.	
Методические особенности определения модуля упругости высокомодульных уг-леродных волокон	286
Горынин Г. Л., Сухомлинова А. Л.	
Проектирование многэтажных конструкций из композитов на деревянной основе	292
Горынин Г. Л., Снигирева В. А.	
Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженной трубе-бетонной стойки	295
Горынин Г. Л., Власко А. Ф.	
Математическое моделирование макроскопического модуля сдвига волокнистых материалов	300
Масленикова И. И., Жиренков А. Н.	
О различном решении выбора вида свай для вечномёрзлых грунтов оснований северных территорий	306
Усов А. В.	
Жилищное строительство в Ханты-Мансийском округе – Югре — задачи разви-тия местной строительной индустрии	311
Славгородский С. А.	
Композитные материалы в современной архитектуре	317
Дидин Г. А., Михеев П. В., Бухаров С. В., Лебедев А. К.	
Использование вихретоковой дефектоскопии при испытаниях деталей турбоком-прессора из композиционных материалов	322

Авторский указатель

329

АКАДЕМИК ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЁВ

Родился Пафнутий Львович 14 мая 1821 г. в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии (неподалеку от г. Обнинска и Боровского-Пафнутьева монастыря). Умер 26 ноября 1894 г. в Петербурге и похоронен в фамильном склепе на родине в основании звонницы церкви в селе Спас-Прогнанье (неподалеку от Окатова), построенной еще его дедом.

В 1837 г. П. Л. Чебышёв поступил на математическое отделение философского факультета Московского университета. В 1846 г. в университете он защитил магистерскую диссертацию по теории вероятностей. Еще в 1841 году за работу «Вычисление корней уравнений» по теме, предложенной факультетом в Московском университете, Чебышёв награждается серебряной медалью, а его докторская диссертация «Теория сравнений» удостоена специальной премии Петербургской Академии наук. Сложившимся ученым П. Л. Чебышёв переезжает в Петербург в 1847 г. В 1859 году Пафнутий Львович избирается академиком Петербургской Академии наук. Там в течение ряда лет вокруг него сформировалась всемирно известная математическая школа. П. Л. Чебышёв со времени приезда в Петербург начал чтение лекций в Петербургском университете, профессором которого он состоял с 1850 по 1882 год. В 1882 году он вышел в отставку, посвятив себя целиком научной работе в Академии наук. П. Л. Чебышёв воспитал большую группу математиков, виднейшими представителями которой были: А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов, Д. А. Граве, Г. Ф. Вороной, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев. П. Л. Чебышёвым написаны первоклассные учебники, он был избран действительным членом Российской академии наук, а также являлся членом Академий наук Франции, Англии, Италии, Швеции. По заданию артиллерийского отделения Военно-ученого комитета им выполнен ряд исследований «по математическим вопросам и опытам».

Научные идеи П. Л. Чебышёва оказали огромное влияние на развитие теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций. Общеизвестной жемчужиной его творчества является знаменитая теорема о распределении простых чисел. Вместе с тем П. Л. Чебышёв глубоко исследовал задачи механики, теории механизмов, занимался изобретательством, связывая эти проблемы с математикой. В частности, теория наилучших приближений функций возникла в процессе усовершенствования Чебышёвым параллелограмма Уатта для паровых машин. Научные интересы П. Л. Чебышёва отличаются большим разнообразием и широтой. Он оставил после себя блестящие исследования в области математического анализа, особенно в теории приближения функций многочленами, в интегральном исчислении, теории чисел, теории вероятностей, геометрии, баллистике, теории механизмов и других областях знаний. В каждой из этих областей науки Пафнутий Львович получил фундаментальные результаты, выдвинул новые идеи и методы, определившие развитие этих ветвей математики и механики на многие годы и сохранившие свое значение и до сих пор. При этом поражает способность Чебышёва простыми, элементарными средствами получать великолепные научные результаты.

В теории вероятностей Чебышёву удалось необычайно простыми средствами получить ряд весьма важных результатов. Многие результаты и выводы были только намечены, не доведены до конца, но все работы Чебышёва в этой области явились той базой, на которой развилась русская школа теории вероятностей. Строгие доказательства многих теорем, намеченные Чебышёвым, и дальнейшее их развитие было проведено его учениками, академиками А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым. Выдающееся значение для науки имели исследования П. Л. Чебышёва в теории чисел. Впервые по-

сле Евклида удивительно остроумными и удивительно элементарными рассуждениями он получил важнейшие результаты в задачи о распределении простых чисел в работах «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах». Российская научная общественность свято чтит память великого русского математика П. Л. Чебышёва. В течение ряда лет Московский университет, Российская академия наук, ИАТЭ, Сургутский государственный университет проводят конференции и чтения, посвященные его памяти и развитию чебышёвского научного наследия. В 1994 г. в год столетия со дня смерти учрежден общественный фонд им. П. Л. Чебышёва.

Величие гения П. Л. Чебышёва состоит в том, что живы его идеи, продолжают исследования, заложенные в его трудах, свидетельством чему является проведение 7-й международной конференции, посвященной математическим и инженерным идеям П. Л. Чебышёва, а также их приложениям к современным проблемам естествознания, связанным с проблемами нефтегазового комплекса.

Пафнутию Львовичу суждено было стать не только великим русским математиком, но и занять почетное место среди математиков мирового класса. В России XIX века не было другого ученого-математика, который отдал бы столько времени, труда и забот, чтобы творения русской математической мысли сделать достоянием математической науки во многих странах.

Шарль Эрмит писал Чебышёву: «Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времен». Оценка научных заслуг П. Л. Чебышёва и то впечатление, которое произвела смерть великого русского математика, отражены в записке в Академию наук А. А. Маркова и Н. Я. Сонина: «Для нашей Академии эта утрата незаменима; ею будет удручен весь ученый мир».



1868 г. Сидят слева направо: А. В. Советов, П. Л. Чебышёв, К. Ф. Кесслер, А. Н. Савич, П. А. Пузыревский, Ф. В. Овсянников, А. Н. Бекетов

Пафнутий Львович прославился не только как большой ученый и прекрасный педагог, но и как глубокий патриот, который в хорошем воспитании и основательном образовании молодёжи, в частности, в математическом образовании, видел одну из прочных основ народного блага, который своими взглядами, и своей энергией способствовал правильной организации образования в России и во всех возможных случаях оказывал помощь молодым ученым и учителям всех уровней.

Академия наук постановила, что «наша родная страна всегда будет гордиться тем, что имя ее сына будет неизгладимыми чертами занесено в летописи всесветной науки» (цит. «Известия Императорской Академии Наук», т. 2, 1985, №1.)



О НОВОЙ ЭКОНОМИКЕ, В КОТОРОЙ ПОБЕДИТЕЛЬ ЗАБИРАЕТ ВСЕ

Бетелин В. Б.

I. О модели промышленного производства массовых дешевых короткоживущих (1-3 года) полупроводников – «полупроводникового ширпотреб»

1.1. Полупроводниковая промышленность США — выгодоприобретатель проекта создания глобального информационного общества

Формирование этой модели массового промышленного производства непосредственно связано с освоением в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века массового производства ЭВМ индивидуального (персонального) использования. Эти персональные ЭВМ (ПЭВМ) обладали технико-экономическими характеристиками массовых бытовых электронных приборов (телевизоры, магнитофоны и т.д.) и не требовали от пользователя специальной профессиональной подготовки в области вычислительной техники и программирования [1]. Ключевыми компонентами, определяющими функциональные возможности и себестоимость этих ПЭВМ, являлись массово производимые микропроцессоры и микросхемы памяти. Поэтому, в последующие годы научно-технический прогресс в области производства полупроводников был нацелен прежде всего на снижение себестоимости базового элемента этих изделий – транзистора, за счет уменьшения его размеров (проектных норм) и, тем самым, размещения на единице площади кремния большего их количества. Так, например, за счет перехода к меньшим проектным нормам стоимость одного бита в микросхемах памяти ежегодно снижалась на 30-35% [2]. К 1998 году объем глобального мирового рынка полупроводников составлял более \$134 млрд, 50% которого контролировали полупроводниковые компании США, которые к этому времени уже апробировали модель товарного производства короткоживущих (1-3 года) высокотехнологичных товаров массового спроса, («полупроводникового ширпотреб») основанную на стратегии «двойного сокращения». То есть, сокращения времени жизни производимого продукта, сокращения сроков разработки нового продукта с новыми возможностями и меры принуждения потребителя к приобретению нового продукта взамен старого. Действительно, например, компания INTEL за семь лет с 1978 г. по 1985 г. выпустила всего три модели микропроцессоров для ПЭВМ, две 8-разрядных 8086 и 8088 и одну 16-разрядную 80286. То есть, в среднем на разработку и подготовку производства новой модели требовалось 2-3 года. Однако за десять последующих лет с 1985 г. по 1994 г. INTEL освоил в массовом производстве уже десять моделей 32-х – разрядных микропроцессоров, то есть, в среднем одну новую модель ежегодно. Соответственно выросла емкость мирового рынка ПЭВМ, если в 80-х годах она составляла миллионы штук в год, то в 90-х годах – уже сотни миллионов штук [3].

22 июля 2000 г. главы государств и правительств стран «Группы восьми» приняли Окинавскую хартию глобального информационного общества. Государства, подписавшие хартию, включая Россию, взяли на себя обязательство обеспечить каждому гражданину возможность приобретения навыков работы с ИТ и создать благоприятные рыночные условия для оказания населению платных услуг в области коммуникаций, в том числе путем открытия внутреннего рынка для информационных технологий, телекоммуникационной продукции и услуг. Другими словами, приобретать вычислительную и коммуникационную технику и программное обеспечение, прежде всего у компаний США, уже контролирующих к этому времени большую часть мирового рынка полупроводников и радиоэлектроники на их основе [4].

Всемирный саммит по информационному обществу, состоявшийся в декабре 2003 г. в Женеве, фактически распространил на все страны, подписавшие эти документы, обязательства «Группы восьми» приобретать вычислительную и коммуникационную технику и программное обеспечение прежде всего у компаний США, тем самым гарантировав многократное увеличение объемов выпуска как их продукции, так и полупроводников, на основе которых эта продукция изготовлена [4]. Действительно, годовой объем продаж полупроводников компаниями США в 2018 году увеличился более чем в три раза, по сравнению с 1998 г., и составил \$208.9 млрд. При этом, INTEL к 2005 году выводил на рынок в среднем уже две новых модели 64-х – разрядных микропроцессоров в год, то есть, в два раза больше, чем до 2000 года. В то же время, в связи с необходимостью выполнения Россией обязательств «Группы восьми» приобретать радиоэлектронику и программное обеспечение, в основном у компаний США, импортозависимость нашей страны в ИКТ-оборудовании составила к 2016 г. от 80 до 100% по различным классам [2].

1.2. Полупроводниковая промышленность США — выгодоприобретатель проекта «Интернет вещей» США

В течение последних 20 лет ключевым фактором роста доходности и объемов производства полупроводников являлось снижение стоимости одного транзистора при переходе на меньшие проектные нормы. Так например, по данным SEMI при переходе от проектных норм 65нм к 40нм стоимость одного транзистора снизилась на 30%, а при переходе от 40нм к 28нм на 25%. Однако, при переходе от 28нм к 20нм и далее к 16нм стоимость одного транзистора не уменьшилась, а даже немного увеличилась, примерно на 3% [3]. По данным TSMC, при переходе к 10нм стоимость одного транзистора несколько снизилась в пределах значений предыдущего роста, а в дальнейшем при переходе к 7нм и 5нм практически стабилизировалась. Это связано прежде всего с прогрессирующим ростом как стоимости технологического оборудования и инфраструктуры, необходимой для его функционирования, так и затрат на их обслуживание. Так, например, стоимость завода по производству полупроводников с проектными нормами 3нм, который компания TSMC планирует ввести в строй в 2022 г., составит \$20 млрд., его энергопотребление – 700Мвт, а водопотребление – 50тыс. тонн воды в сутки (BLOOMBERG). То есть к настоящему времени модель развития лидирующей полупроводниковой отрасли США, в основе которой снижение стоимости транзистора за счет перехода на меньшие проектные нормы, практически себе исчерпала.

Концепция новой модели развития полупроводниковой отрасли США, как катализатора роста всей экономики страны, фактически была сформулирована в решении Сената США в 2015 г. об ускорении разработки и внедрения «Интернета вещей». Инициаторами и наиболее активными участниками обсуждения этой проблемы являлись представители компаний INTEL и Samsung, а также Ассоциация производителей полупроводников США. Проект закона об «Интернете вещей» был одобрен Сенатом в 2017 г. и передан на рассмотрение в Палату представителей. В преамбуле этого закона прогнозируется, что к 2020 г. к Интернету будут подключены более 50 млрд. устройств, что может генерировать триллионы долларов оборота в новой экономической деятельности по всему миру [5].

Основой этой новой экономической деятельности будет производство компаниями США сотен миллиардов полупроводников и десятков миллиардов цифровых систем управления этими устройствами. Именно эти компании и будут в числе основных получателей триллионов долларов, то есть основными выгодоприобретателями «Интернета вещей» США.

Россия не владеет технологиями и не располагает предприятиями, способными обес-

печить производство таких типов полупроводников и цифровых систем управления на их основе. Продукцию, относящуюся к категориям как потребительского, так и промышленного «Интернета вещей» США, Россия всего лишь импортирует или собирает из импортных комплектующих. Поэтому Россия будет только донором, не получателем этих триллионов, что приведет к еще большей импортозависимости и существенному увеличению числа и степени серьезности кибератак [5].

II. О модели оказания массовых дешевых короткоживущих услуг на основе массовых дешевых цифровых технологий

Формирование этой модели оказания услуг непосредственно связано с созданием в конце 80-х начале 90-х годов прошлого века, отдельных сегментов сети Интернет (далее Сеть), и цифровой технологии по передаче текстовых сообщений («электронная почта»). Стоимость услуг по передаче текстовых сообщений, в основном, определялась стоимостью вычислительного и коммуникационного оборудования Сети. В свою очередь, стоимость этого оборудования определялась стоимостью полупроводников, на основе которых оно изготовлено. То есть удешевление стоимости полупроводников в соответствии со стратегией «двойного сокращения» в конечном счете, приводило к интенсивному удешевлению цифровых технологий по передаче текстовых, а затем графических и видео сообщений в Сети и услуг на их основе. При этом доходность этого нематериального «информационного ширпотреба» оказалась значительно выше, чем полупроводникового. Прежде всего из-за огромного числа ежедневно оказываемых услуг (многие сотни миллионов передаваемых сообщений), а также потому, что для нематериальной услуги отсутствуют затраты на разработку и постановку на производство, а время ее жизни фактически определяется временем прохождения сообщения в Сети. О высокой доходности этих услуг свидетельствуют экономические показатели компаний FACEBOOK, GOOGLE, AMAZON и APPLE, которые специализируются на доставке потребителю информации и товаров массового спроса. Действительно, совокупная стоимость этой «ЧЕТВЕРКИ» составляет \$2.8 трл. В 2017 году FACEBOOK и GOOGLE инвестировали в развитие \$29 млрд., а на зарубежных счетах APPLE, в том же году, хранилось \$250 млрд. При этом капитализация FACEBOOK в 2018 году составила \$448 млрд., а INTEL только \$165 млрд. Ежедневно 1.2 млрд. пользователей тратят на обращение к FACEBOOK в среднем 50 минут. Обращение к FACEBOOK – это одна из шести минут в Интернете и одна из пяти минут в мобильном телефоне [6].

III. Миром правит новая экономика, в которой победитель забирает все

Это один из наиболее существенно важных выводов профессора бизнес-школы университета Нью-Йорк Скотта Галлоуэя в его книге «ЧЕТВЕРКА» [6]. Формирование этой новой экономики автор непосредственно связывает с интенсивным удешевлением цифровых технологий и высокой прибыльностью замены сотрудников этими технологиями. Это привело к ускоренному уничтожению рабочих мест и опустошению смежных секторов экономики. Впервые со времен Великой депрессии тридцатилетние американцы живут хуже, чем в том же возрасте жили их родители [6]. То есть выгодоприобретателями научно-технического прогресса в области массовых дешевых цифровых технологиях являются акционеры «Четверки», но не средний класс Америки, который грабит невидимая рука рынка.

Одна из основных причин в том, что лидеры этой новой экономики AMAZON, GOOGLE, FACEBOOK и APPLE создают высокооплачиваемые рабочие места, но в ничтожном количестве, то есть существенно меньше чем уничтожают. Они строят Аме-

рику, в которой будет 3 миллионов хозяев и 350 миллионов рабов [6]. «Четверка» либо поглощает конкурентов, либо душит, повторяя основные функции продукта – конкурента. Другими словами вся экономическая мощь Четверки фактически направлена на уничтожение конкуренции.

Обладая огромной экономической мощью «Четверка» тем не менее успешно укрывается от налогов, уменьшая возможности государства по финансированию науки, образования и социальной сферы. Так, например, в период с 2007 по 2015 год налоговые отчисления APPLE составили 17% от всей прибыли, GOOGLE – 16%, AMAZON – 13%, а FACEBOOK всего 4%. В то время, как налоговые отчисления крупного бизнеса в США в среднем составляют 27% [6]. В условиях новой экономики, в которой победитель получает все, интеграция России в эту мировую экономику означает поглощение или разорение победителями российских высокотехнологичных компаний, прежде всего в IT-отрасли, а в дальнейшем и в машиностроении страны, уничтожении рабочих мест, еще большее снижение налоговых поступлений в бюджет страны. То есть, в конечном счете, «скатывание отечественной экономики к рецессии» и полную невозможность вывести экономику страны из «серьезной застойной ямы», победы над бедностью и вхождения России в пятерку крупнейших экономик мира.

ЛИТЕРАТУРА

1. Велихов Е.П., Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г. Промышленность, инновации, образование и наука в России. М.: Наука, 2010-г.
2. Бетелин В.Б. Проблемы и перспективы формирования цифровой экономики в России // Вестник РАН, 2018, №1, с. 3–9.
3. Бетелин В.Б. О проблеме импортозамещения и альтернативной модели экономического развития России. ж. Стратегические приоритеты, №1 (9), 2016 г.
4. Бетелин В.Б. Проблемы и перспективы образования в постиндустриальном информационном обществе. // Вестник РАН, 2019, №6, с. 582–592.
5. Бетелин В.Б. О проблеме диверсификации производства на предприятиях оборонно-промышленного комплекса России. ж. Инновации №7 (237), 2018, с. 3–7.
6. S.Galloway. «The Four. The hidden DNA of Amazon, Apple, Facebook and Google». Portfolio/Penguin. An Imprint of Penguin Random House LLC 375 Hudson Street. New York, New York 10014.

Доклады в Обнинске

ЦИФРОВОЙ СИМУЛЯТОР ДВИЖЕНИЙ ФЛЮИДА В КЕРНЕ – ПЕРСПЕКТИВНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ И ДОБЫЧЕ ТРУДНОИЗВЛЕКАЕМЫХ ЗАПАСОВ НЕФТИ

Бетелин В. Б., Галкин В. А., Шпильман А. В., Смирнов Н. Н.

На территории России, составляющей 12,8% территории Земли, сосредоточено 12-13% прогнозных ресурсов, около 12% разведанных запасов нефти. Доказанные запасы нефти России составляют примерно 13.9 млрд т нефти на 01.01.2018 (~101 млрд. баррелей). Коэффициент извлечения нефти по доказанным запасам составляет ~17%. Повышение коэффициента извлечения нефти представляет собой колоссальный резерв повышения уровня добычи нефти в стране при небольших затратах. Создание усовершенствованного, отечественного симулятора движения флюида в керне (керно-симулятора), предназначенного для отечественных суперкомпьютеров, с возможностью воспользоваться различными приёмами ускорения счета является одним из важнейших элементов в освоении стратегических резервов углеводородного сырья нашей страны.

Ключевые слова: нефтяное месторождение, запасы нефти, коэффициент извлечения нефти, вычислительное моделирование, керно-симулятор.

DIGITAL CORE-SIMULATOR - PROMISING TECHNOLOGIES FOR EXPLORATION AND PRODUCTION OF HARD-TO-RECOVER OIL RESERVES

Betelin V. B., Galkin V. A., Shpilman A. V., Smirnov N. N.

Territory of Russia, which occupies 12.8% of the Earth's territory, contains 12-13% of the forecast resources, and about 12% of the discovered oil reserves. Russia's proven oil reserves amount to approximately 13.9 billion tons of oil as of January 1, 2017 (~101 billion barrels). Oil recovery factor for proved reserves is ~17%. The increase of oil recovery factor represents a huge stockpile for raising the level of oil production in the country at low costs. Creation of improved, domestic core-simulator designed for indigenous supercomputers, with the opportunity to take advantage of various methods of speeding up

the numerical simulations process is one of the most burning issues in the development of strategic reserves of hydrocarbons in our country.

Keywords: oil deposit, oil reserves, oil recovery factor, numerical simulations, core-simulator.

В.Б. Бетелин, научный руководитель Федерального научного центра - Научно-исследовательского Института системных исследований Российской академии наук, академик Российской академии наук, профессор, д.ф.-м.н., член Президиума Российской академии наук, член Бюро Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук, член Совета директоров институтов РАН, член НТС военно-промышленной комиссии при Правительстве Российской Федерации, член НТС ОАО «Российская корпорация нанотехнологий», член Совета генеральных и главных конструкторов, ведущих ученых и специалистов в области высокотехнологичных секторов экономики при Председателе Правительства Российской Федерации, член Российского национального комитета по индустриальной и прикладной математике, член консультативного научного совета некоммерческой организации «Фонд развития Центра разработки и коммерциализации новых технологий» («Сколково»).



А.В. Шпильман, директор АУ «Научно-аналитический центр рационального недропользования им.В.И.Шпильмана», к.г.-м.н., доцент кафедры Геологии нефти и газа Тюменского индустриального института, эксперт Экспертно-технического совета секции УВС ФБУ «ГКЗ», Западно-Сибирской нефтегазовой секция ЦКР Роснедр по УВС, Экспертного совета при Комитете Государственной Думы по энергетике, эксперт Группы по нефтяным ресурсам Экспертного совета по классификации ресурсов ЕЭК ООН, Председатель Совета образовательных программ бакалавриата и магистратуры «Нефтегазовое дело» Санкт-Петербургского Государственного Университета (СПбГУ).



В.А. Галкин, доктор физико-математических наук, профессор, начальник отдела ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, награжден Российским национальным комитетом по теоретической и прикладной механике медалью Х.А. Рахматулина за большой вклад в развитие вычислительных методов при решении задач механики, награжден знаком отличия «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации», получил премию им. В.Н. Глазанова «За разработку основных положений теории функциональных решений законов сохранения», с 2010 по 2012 гг. руководитель Обнинского института атомной энергетики – филиала НИЯУ МИФИ, с 2013 по 2018 гг. директор Политехнического института Сургутского государственного университета



Н.Н. Смирнов, профессор МГУ им. М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., заместитель декана механико-математического факультета, заведующий лабораторией волновых процессов, заместитель директора Федерального научного центра - Научно-исследовательского Института системных исследований Российской академии наук, эксперт РАН, председатель Российской секции Международного Института горения, член Совета по горению и взрыву при Президиуме РАН, с 1999 г. по 2014 г. заместитель председателя Совета, член Секции НТС ФГУП ЦНИИмаш «Фундаментальные исследования в области космических технологий», член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, академик Международной академии астронавтики.



На данный момент Россия занимает лидирующее место по добыче нефти. В 2011 году добыча нефти в России составила уже 510 млн. т, а в 2017 г. – возросла до 546,7 млн. т. По мере экономического роста России потребности в нефти будут увеличиваться. По прогнозам Энергетической Стратегии России до 2030 года нефтяная отрасль страны будет добывать не менее 500 млн. тонн нефти при различных сценариях. Это потребует прироста запасов на уровне не ниже добычи нефти. При ухудшении рыночной ситуации или принятии политически мотивированных государственных решений на международном уровне добыча нефти в России может сократиться ниже 500 млн. т, но такие сценарии представляются маловероятными.

В общем балансе остаточных запасов нефти России велика доля так называемых трудноизвлекаемых запасов (ТриЗ). К ТриЗ относят в том числе запасы с более низкими фильтрационно-емкостными свойствами коллекторов и, соответственно, темпами отбора, которые в несколько раз ниже тех, которые достигаются на месторождениях с более благоприятными условиями разработки. На долю ТриЗ приходится около 50% разведанных запасов России. А добыча нефти из них составляет в настоящее время ~8% в год.

Остаточные запасы разрабатываемых месторождений характеризуются в России рядом

отрицательных особенностей:

- высокой степенью выработанности, которая на многих эксплуатируемых месторождениях превысила 50%,
- высокой обводненностью пластов - в среднем порядка 70%.

Кратность добычи нефти к доказанным (proved) запасам отечественной нефтяной промышленности составляет ~ 27 лет. Это хорошая обеспеченность добычи запасами, но поддержка добычи на уровне ~ 500 млн. т в год потребует дополнительных усилий по приросту запасов, с учётом того, что качество остаточных запасов ухудшается.

Неизбежно возникает вопрос: а эффективно ли мы используем уже разведанные и разрабатываемые нефтяные месторождения? Достаточно ли полно мы извлекаем из недр содержащиеся в них углеводороды, в первую очередь, нефть?

Основная объективная причина низкой степени извлечения нефти связана с тем, что различные участки пород обладают различным сопротивлением течению пластовых флюидов – нефти, газа и воды, то есть обладают «фильтрационной неоднородностью». Это приводит к появлению застойных зон, или, выражаясь профессиональным языком, «целиков нефти». После того, как такие целики «обойдены» пластовой водой или водой, специально закачанной в пласт для вытеснения нефти, они практически далее не вырабатываются.

Такие целики имеют различные пространственные размеры – масштаба пор (то есть от долей микрона до долей миллиметров) - «микроцелики»; масштаба геологических пропластков и слоев (то есть от сантиметра до нескольких метров); масштаба расстояния между нефтяными скважинами (то есть от десятков до сотен метров).

Снижение КИН (коэффициента извлечения нефти) возможно и за счет вязкостной неустойчивости фронта вытеснения, поскольку вытесняющий агент (вода) обладает меньшей вязкостью, чем нефть. Это приводит к появлению «языков» вытесняющей жидкости, защемляющих целики нефти.

Повышение КИН представляет собой колоссальный резерв повышения уровня добычи нефти в стране при меньших затратах. После разработки на месторождениях остается большая часть остаточных запасов, сосредоточенных в целиках и линзах мезо- и макро-масштаба, которые, в принципе, являются резервом дополнительной добычи. Если даже предположить, что удастся увеличить КИН на 5% – с 17% до 23%, то дополнительно можно добыть ~4 млрд. т нефти

К настоящему времени в мире освоены и применяются в промышленных масштабах пять групп методов повышения нефтеотдачи:

- уплотнение сетки добывающих скважин (в том числе бурение боковых наклонно-направленных стволов);
- газовые методы (закачка углеводородных газов, углекислого газа, азота, дымовых или других газов, закачиваемых в пласт как самостоятельно, так и в смеси с жидкостями);
- физико-химические методы (различные виды заводнения: с применением ПАВ, полимерное, мицеллярное; закачка жидких растворителей; закачка других химических веществ: кислот, щелочей, растворов солей и т.д., и т.п.);
- тепловые методы (вытеснение нефти теплоносителями, воздействие с помощью внутрипластовых экзотермических окислительных, либо других видов реакций).
- микробиологические методы (введение в пласт бактериальной продукции или ее образование непосредственно в нефтяном пласте).

Весьма перспективными в стратегическом плане представляются и так называемые нетрадиционные коллектора: кремнисто-глинистые и карбонатно-кремнисто-глинистые

нефтенасыщенные породы баженовской свиты. На сегодняшний день рассматриваются несколько методов разработки таких залежей:

- добыча нефти традиционными методами из высокопроницаемых разностей и пор матрицы пород, которая реализуется на сегодня в Западной Сибири;
- применение гидроразрыва пласта (различного дизайна) для увеличения скорости притока нефти к скважине и увеличения объёма дренируемых скважиной пород;
- создание в пласте очага горения пластовых углеводородов с закачкой в пласт воздуха (термогазовое воздействие). Процессы происходящие в пласте при термогазовом воздействии не до конца изучены. Некоторые исследователи предполагают, что происходит преобразование керогена в нефть и газ.

Добыча оставшейся в недрах нефти требует комплексного подхода. Необходимо производить оптимизацию воздействий (механических, тепловых, химических), которые оказывают на пласт с целью повышения коэффициента извлечения нефти. Конечно, данные параметры можно подобрать эмпирическим путем, но ограниченное количество экспериментов и высокая стоимость натурных испытаний делают поставленную задачу сложновыполнимой.

На данный момент ни один из существующих симуляторов не позволяет эффективно вести расчеты при использовании мелкоячеистой адаптивной сетки с размерами ячеек в сантиметры и тем более, миллиметры, т.е. невозможно исследовать пласт на микроуровне. Также коммерческие симуляторы не позволяют эффективно рассчитывать процессы фильтрации с учетом неравновесных фазовых превращений и с учетом неравновесных химических реакций. Современные симуляторы не адаптированы для распараллеливания на суперЭВМ. Большинство ориентировано на использование обычных персональных компьютеров с одним процессором. В этом случае, расчет всего одного варианта: а) при моделировании внутрипластового горения на сравнительно небольшой сетке, или б) расчет простой изотермической двухфазной фильтрации, но на большом месторождении (порядка 1000 скважин) на сетке с ячейками 25 м, на ПК занимает месяцы, а на кластерных системах – недели. При проектировании или управлении разработкой, число расчётных вариантов исчисляется десятками.

Кроме того, применение зарубежных термогидросимуляторов несёт риск невозможности их использования, или совершенствования, или адаптации к иным условиям или задачам - в случае изменения геополитической обстановки и усложнения контактов с правительствами стран-разработчиков. Для освоения стратегических резервов углеводородного сырья страны такое положение неприемлемо.

Для успешного создания многомасштабного термогидросимулятора необходимо умение детально описывать течение и взаимодействие флюидов и пористого скелета на малых масштабах, сравнимых с масштабами извлекаемых при бурении кернов. Эта задача дала толчок для разработки ведущими лабораториями мира так называемых керносимуляторов.

Таким образом, создание усовершенствованного, отечественного керносимулятора, предназначенного для отечественных суперкомпьютеров, с возможностью воспользоваться различными приёмами ускорения счета является одним из важнейших элементов в освоении стратегических резервов углеводородного сырья нашей страны.

Для решения поставленной проблемы керносимулятора был создан консорциум (Рис.1), включающий в себя Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований РАН» (г. Москва), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва), Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В. И. Шпилемана (г. Ханты-Мансийск, г. Тюмень), ООО «Центр вычислительного моделирования» - резидент Сколково (г. Зеленоград)



Слева направо: стоят В.Ф. Никитин, М.П. Савранская, Е.И. Скрылева, В.В. Тюренкова, Н.Н. Смирнов, А.В. Шпильман, О.В. Латыпова, В.Б. Бетелин, О.В. Джугашвили, Е.В. Михальченко, П.А. Стулов; сидят Д.Е. Добровольский, Л.И. Стамов, А.Н. Сидоров, А.А. Сидоров.



Слева направо: Н.Н. Смирнов, В.А. Галкин, В.Б. Бетелин, А.В. Шпильман.

Рис. 1. Рабочая группа по созданию «керноsimулятора» в рамках проекта «Цифрового месторождения», г. Москва, 2016.

и Сургутский государственный университет (г. Сургут). Объединив в себе фундаментальные и практические знания в области математики, механики, вычислительных систем, геологии и геофизики, консорциум поставил себе задачу создать программный

комплекс «керноsimулятор» в рамках проекта «Цифровое месторождение», включающий валидацию численных результатов на собственном экспериментальном базисе и отработку технологии для моделирования изменений в пласте на микроуровне при воздействии на него разными способами - нагревании, закачке реагентов, гидроразрыве и т.д.

Консорциумом были опубликованы ряд статей по тематике работы [1, 6-10] и организованы следующие научные мероприятия, на которых были представлены результаты совместной деятельности:

- Всероссийская научная конференция «Цифровая модель керна» (г. Москва, 2017);
- секция в рамках Международной конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе» (г. Сургут, 2016),
- XX научно-практическая конференция «Пути реализации нефтегазового потенциала Ханты-Мансийского автономного округа - Югры» (г. Ханты-Мансийск, 2016);
- заседания рабочей группы в г. Ханты-Мансийске (2015 г.), г. Сургуте (2015 г.), г. Тюмени (2015 г.), г. Тобольске (2015 г.), г. Суздале (2016 г.);



Рис. 2. Образцы керна (песчаник).

В результате сотрудничества организаций в рамках консорциума были получены следующие результаты.

На основе результатов томографии образцов керна (песчаника) (Рис.2, Рис. 3) был разработан метод восстановления структуры порового пространства образца керна из данных его рентгеновской томографии. В качестве исходных данных рассматривался коэффициент поглощения рентгеновского излучения образцом среды, заданный в 16-ти битном формате. Физически образец представлял собой керна диаметром около 8 мм и длиной около 19 мм. В численном виде после проведения рентгеновской томографии и восстановления коэффициента поглощения рентгеновского излучения образец был разбит квадратной сеткой размерами $2600 \times 2600 \times 6360$ ячеек (около 43 миллиарда ячеек). Из этих данных в дальнейшем выделялась структура каналов и пор на основании выбора порогового значения коэффициента поглощения рентгеновского излучения, т.е. считалось, что все, что выше порогового значения является в рассматриваемой области скелетом; а все, что ниже, является поровым пространством.

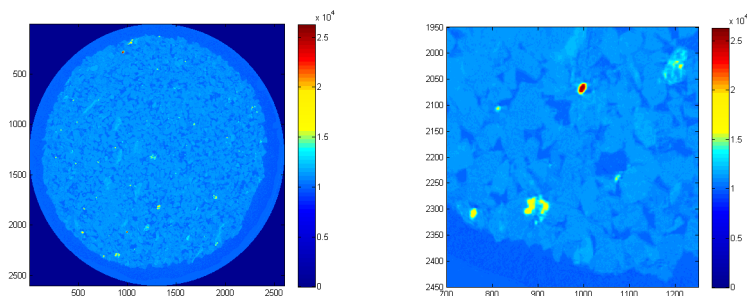


Рис. 3. Результаты рентгеновской томографии.

Для визуализации данных томографии был разработан специальный пакет PoreProject (Рис.4.). Пакет позволяет визуализировать внутреннюю структуру образца керна, а также рассматривать различные части и сечения исследуемого объекта. По сравнению с аналогичными пакетами, PoreProject разработан специально для визуализации структуры керна и может обрабатывать значительно большие массивы данных.

В полученной структуре порового пространства было проведено численное моделирование течения жидкости на основе модели Стокса для несжимаемой жидкости (Рис.5). Возможность такого моделирования является крайне актуальной, так как различные исследования реальных образцов горных пород представляют собой весьма трудоемкие и сложные задачи, и сопряжены с рядом трудностей. Например, некоторые из таких исследований являются «одноразовыми» и приводят к невозможности проведения повторного эксперимента, либо каких-либо других экспериментов и к полному разрушению исследуемого образца. В связи с этим возможность моделирования течений внутри «цифрового керна» представляет значительный интерес, так как дает возможность проведения любого количества сложных экспериментов и, в настоящее время, ограничена только лишь вычислительными ресурсами.

На данный момент ведутся работы по оценке пористости и проницаемости системы пор и каналов, полученной в результате обработки рентгеновской томографии, и подбору оптимального порогового значения коэффициента рентгеновского поглощения, на основании которого происходит разделение порового пространства и твердого скелета.

Также были проведены натурные эксперименты по вытеснению моделей нефти водой из неокомских песчаников. Модель нефти (масло или керосин) вытеснялась из керна под действием постоянного перепада давления или с постоянным расходом. Было проведено численное моделирование процесса вытеснения нефти, результаты расчётов были сопоставлены с экспериментальными данными [9]. На основе результатов экспериментов подбирались коэффициенты для расчёта капиллярных эффектов в математической модели, использованной при численном моделировании.

На основе проведенных исследований был создан интерактивный практикум для студентов обучающимся по нефтегазовым специальностям (Рис.6). Практикум позволяет студентам в программе с удобным интерфейсом моделировать на макроуровне течения вязких жидкостях в образцах керна. В процессе выполнения заданий практикума студенты изучают влияние различных параметров на процесс вытеснения нефти из порового пространства, исследуют возможности повышения коэффициента вытеснения. Полученные результаты моделирования студенты могут сравнивать со встроенны-

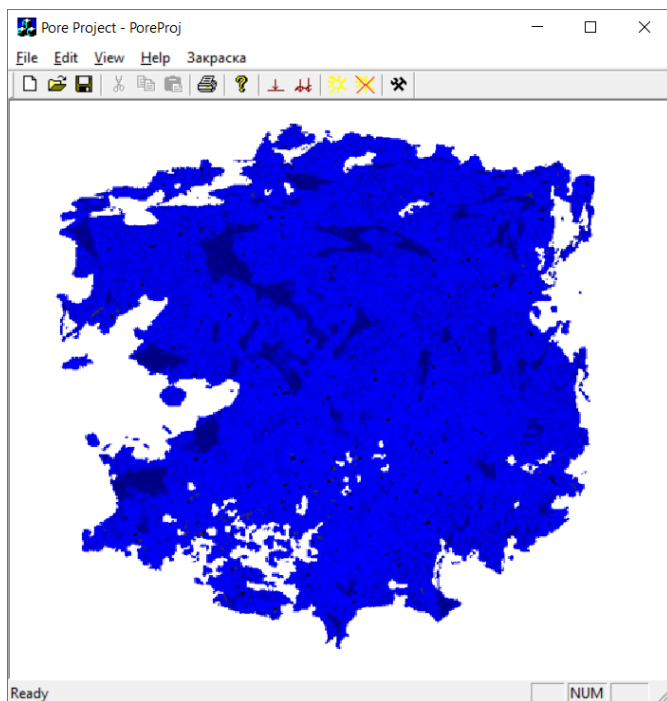


Рис. 4. Пакет *PoreProject* разработки ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН

ми в программу результатами экспериментов по вытеснению моделей нефти водой из неокосмских песчаников.

Было исследовано влияние трещины гидроразрыва пласта на динамику и качество извлечения нефти (Рис.7), проведено численное моделирование вытеснения углеводорода из области пористой среды [10]. Нефть вытеснялась из области водой, которая подавалась на нагнетательные скважины. Около добывающей скважины могла находиться трещина гидроразрыва, которая моделировалась как зона повышенной проницаемости и пористости. Исследование влияния трещины гидроразрыва пласта на процесс нефтедобычи показало, что наличие трещины ускоряет вытеснение нефти, при этом суммарное количество добытой нефти не изменяется. Ориентация трещины гидроразрыва может существенно влиять на динамику вытеснения. Таким образом, можно сделать вывод, что трещина гидроразрыва не приводит к увеличению нефтеотдачи пласта.

Для обработки массивов данных томографии образцов керн и численного моделирования задач фильтрации использовались вычислительные мощности Федерального научного центра НИИСИ РАН и его филиалов, Межведомственного суперкомпьютерного центра и Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

В будущем планируется продолжить развитие математических и численных моделей [11] для создания высокопроизводительной супервычислительной системы, необходи-

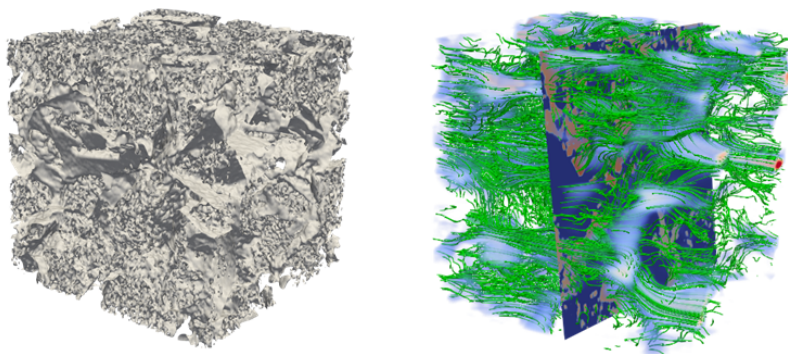


Рис. 5. Моделирование течения в поровом пространстве образца керна.

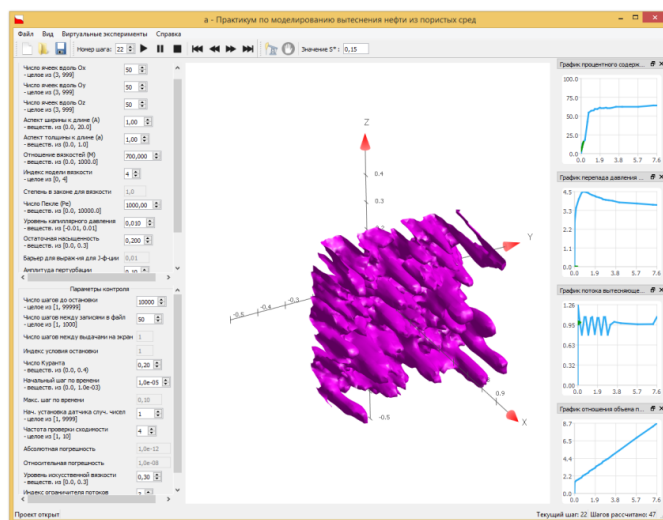


Рис. 6. Студенческий практикум по моделированию вытеснения нефти из пористых сред разработки ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

мой для предсказательного моделирования многомасштабных явлений в подземной гидродинамике, в которых взаимозависимые процессы развиваются на разных масштабах и характерные времена их протекания различаются на порядки.

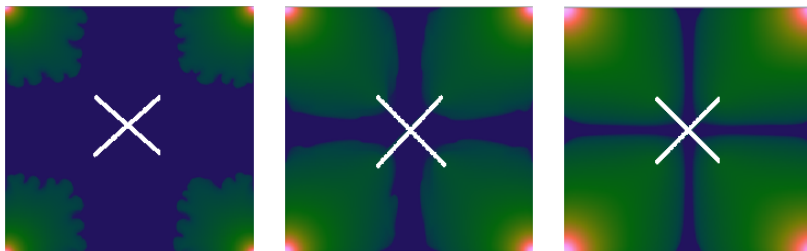


Рис. 7. Вытеснение нефти из области содержащей трещину гидроразрыва пласта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Н.Н., Тюренкова В.В., Киселев А.Б., Никитин В.Ф. Фильтрационные течения в пористой среде // Северный регион: наука, образование, культура. 2015. №2 (32), том 2. С. 74-86.
2. Вольпин С.Г., Смирнов Н.Н., Кравченко М.Н., Диева Н.Н. Моделирование импульсно-волновой обработки нефтяных пластов методом термогазохимического воздействия // Сборник научных трудов ОАО «Всероссийский нефтегазовый научно-исследовательский институт им. акад. А.П. Крылова». 2013. Вып. 149. С. 127-137.
3. Вольпин С.Г., Саитгареев А.Р., Смирнов Н.Н., Кравченко М.Н., Корнаева Д.А., Диева Н.Н. Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефтяное хозяйство. 2014. №1. С. 62-66.
4. Вольпин С.Г., Смирнов Н.Н., Кравченко М.Н., Диева Н.Н. Оптимизация условий безопасного проведения ТГХВ на нефтяных месторождениях // Экологический вестник России. 2014. № 3. С. 17-21.
5. Никитин В.Ф., Стамов Л.И. Трехмерное вычислительное моделирование течения вязких жидкостей в канальной модели керносимлятора // Вестник кибернетики. 2016. № 4. С. 7-17.
6. Никитин В.Ф., Стамов Л.И., Михальченко Е.В. Трехмерное математическое моделирование течения вязких жидкостей в многосвязной системе каналов и пор // Вестник кибернетики. 2016. № 2. С. 127-137.
7. Бетелин В.Б., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н., Михальченко Е.В., Скрылева Е.И., Стамов Л.И., Тюренкова В.В. Компьютерный керносимлятор – подходы и методы // Вестник кибернетики. 2015. № 4(20). С. 33-44.
8. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Тюренкова В. В., Стамов Л.И. Визуализация результатов моделирования неустойчивого вытеснения нефти из пористой среды // Труды НИИСИ РАН. 2016. Т.6. №2.
9. Козлов И. В., Скрылева Е. И. Математическое моделирование и обработка эксперимента по вытеснению нефти водой из неокомских песчаников // Вестник кибернетики. 2016. №2. С. 138-145.
10. Душин В.Р., Никитин В.Ф., Скрылева Е.И. Вычислительное моделирование вытеснения флюида из пористой среды // Вестник кибернетики. 2017, № 28. С. 62-82
11. Галкин В.А., Гимранов Р.Д., Шпильман А.В. РФФИ в Югре. Будущее региона и Сургута - за высокими технологиями // Вестник кибернетики, 2017, №4, 11-16.

ПРОГНОЗЫ РАЗВИТИЯ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ВЫЗОВЫ НЕФТЯНОЙ ОТРАСЛИ МИРА

Шпильман А. В.

*Автономное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа – Югры
«Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В.И.
Шпильмана»*

Бурное развитие нефтяной отрасли в мире, начавшееся 150 лет назад, продолжается и в настоящее время. Многие известные специалисты, специализирующиеся на прогнозе добычи, предрекали кризис, предсказывали ее добычи, сокращение спроса, но реальность все расставила по своим местам.

Во-первых, оказалось, что альтернативные источники энергии влияют на энергетический баланс потребления крайне незначительно.

Во-вторых, все время открываются новые виды залежей нефти. Их часто называют нетрадиционными (unconventional). Первыми были огромные запасы нефтяных песков Атабаски, которые вывели в свое время Канаду на первое место в мире по запасам нефти, затем «тяжелые» нефти Венесуэлы, и наконец наступила «сланцевая революция» в США.

В настоящее время в мире в год добывается 4,4 млрд. т (32,7 млрд. баррелей) нефти, а доказанные запасы нефти составляют 224 млрд. т (1657,4 млрд. баррелей).

Прогнозы одного из лучших специалистов в нефтяной отрасли Колина Кэмпбэлла (США), показывают, что к 2030 году в мире будет добываться порядка 39 млн. баррелей/сут (5,3 млн. т/сут). Его же прогноз по России дает 3,8 млн. баррелей/сут (0,5 млн. т/сут) к 2030 году.

Представляется, что эти цифры несколько занижены. По нашему прогнозу добычи нефти, только в Ханты-Мансийском автономном округе будет добываться не менее 100 млн.т только из известных и уже разрабатываемых месторождений. Существуют также новые месторождения, баженовская нефть – резервы еще огромные, но и вызовы существуют.

На настоящий момент нефтяная отрасль в ХМАО и России сталкивается с несколькими вызовами:

1. Растущая обводненность продукции, которая стремится к 90%, т.е. на каждые 100 тонн добычи нефти добывается 90 тонн воды;
2. Уменьшение среднего КИН в связи с вводом в разработку запасов худшего качества;
3. Необходимость освоения рентабельных технологий разработки сланцевых отложений баженовской, доманиковской и др. сланцевых толщ;
4. Разработка запасов тяжелых нефтей;
5. Нетрадиционные ресурсы, которые предстоит осваивать в будущем, например, газогидраты.

Особое место в преодолении этих вопросов принадлежит науке. В 60-е годы поиски месторождений методами сейсморазведки основывались на передовых военных технологиях радиолокации, а аккумулятивные заряды для перфорации пластов также использовали принципы фокусирования взрыва. В настоящее время вопросы гидродинамики также крайне важны при моделировании течения многофазной жидкости в сложной поровой среде. Вопрос повышения КИН в конечном итоге – это вопрос дистанционного управления подземными течениями, и здесь высококлассные российские специалисты мирового уровня могут сказать свое слово.

В среднесрочной перспективе Россия останется мировой энергетической державой, и до 2050 года энергетическая безопасность будет во многом определяться состоянием

нефтяной отрасли. Задачи энергетической безопасности предстоит решать будущему поколению нефтяников, геологов, ученых.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Галкин В. А.

Филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН в гор. Сургуте

Исследования течения жидкостей в пористых твердых матрицах играют важную роль в задачах добычи нефти и газа, неоднородного катализа, управления водными ресурсами, в производстве стиральных порошков и т. д. Математически эта проблема напрямую связана с поведением решений для систем законов сохранения квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial u_{\beta}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j} = 0.$$

Здесь заданные нелинейные функции $F_j^{(\beta)}$ (потоки) определяют локальную связность в среде.

Анализ глобальной геометрии в «пористой среде» напрямую связан со структурной особенностью решений уравнения (1), которое основано на так называемой теории функциональных решений в алгебраически сопряженном пространстве, оснащенном топологией А.Н.Тихонова [1].

Рассматривается проблема связности в метрическом пространстве, моделью которого является «пористая среда». Основным вопросом является описание меры, отображающей количество глобальных связей между двумя точками в пространстве при условии локального распределения связей в микроструктуре. Пористая среда представляет собой сеть межзёрнных каналов, образованных внутренне связанными промежуточными пространствами между частицами.

Структура каналов, обеспечивающих возможное перемещение флюидов внутри образования, имеет крайне сложную топологию (см. рис. 2), и реконструкция таких 3-D «связей» в поровом пространстве представляет крайне сложную математическую задачу, которая сопряжена с огромными вычислительными трудностями для реальных масштабов нефтяных залежей.

Реконструкция порового пространства приводит к объектам теории множеств, имеющим свойства фрактальной структуры, подобные Канторовскому континууму (аналогично см. также ковёр Серпинского (рис. 3), ожерелье Антуана (рис. 4), «рогатая сфера» Александра (рис. 5)):

См. ссылки на сайтах:

https://yandex.ru/images/search?text=%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%B5%20%D0%B0%D0%BD%D1%82%D1%83%D0%B0%D0%BD%D0%B0&type=image&lr=967&source=wiz&pos=2&img_url=https%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2Fb%2Fba%2FAntoine%2527s_Necklace_Iteration_2.png%2F440px-Antoine%2527s_Necklace_Iteration_2.png&rpt=simage
http://kvant.mccme.ru/1990/06/rogataya_sfera_aleksandera.htm

Для задач течения и диффузии жидкостей в пористых материалах, таких как породы нефтяного пласта, наблюдаемые типичные значения сечений каналов обычно находятся в диапазоне 1 – 100 мкм (1 мкм = 10⁻⁶ м). Поскольку сканирование сечений



Рис. 1. Общий вид образцов керна (предоставлено НАЦ рационального недропользования им. В.И. Шпилемана)

образцов приводит к задаче объединения полученных данных в объемную структуру связанных каналов, то для одного кубического метра песчаника с пористостью $\sim 25\%$ получаем оценку порядка $10^{12} - 10^{18}$ числа вершин графа, образующих возможные связи, см. рис. 2. Для таких данных задача визуализации требует гигантских объемов вычислительной работы, и если учесть масштабы реальной залежи (простейшая модель — это многокилометровый куб), то следует привлекать иные подходы для математического моделирования с разумными вычислительными затратами.

Геометрические задачи моделирования глобальных структур в поровом пространстве (рис. 6) основываются на графе локальных связей пор.

Эти задачи близки к описанию структур в многомерном бильярде, полученных в вычислительных моделях для бесстолкновительного газа Д.А.Быковских, см. рис. 7.

Естественные примеры указанных проблем возникают при описании глобальных структур, образованных связанными порами в матрице нефтеносных песков, и аналогичные проблемы возникают при исследовании материалов ядерных реакторов под воздействием потока нейтронов. Крайне важный аспект моделирования динамики флюидов в поровом пространстве с учетом вышеупомянутых вычислительных проблем — это построение усредненных уравнений движения, основанных на идеях Л.Больцмана (в статистической механике): «Для больших систем взаимодействующих частиц в системе, находящейся в равновесии, среднее значение величин по времени вдоль одной траектории равно их среднему значению по пространственным переменным», и восходящих к работам Стокса, Дарси и Ома.

Аналогичные по масштабу сложности проблемы связаны с моделированием динамики крови в кровеносных сосудах человека. Математически классы упомянутых задач

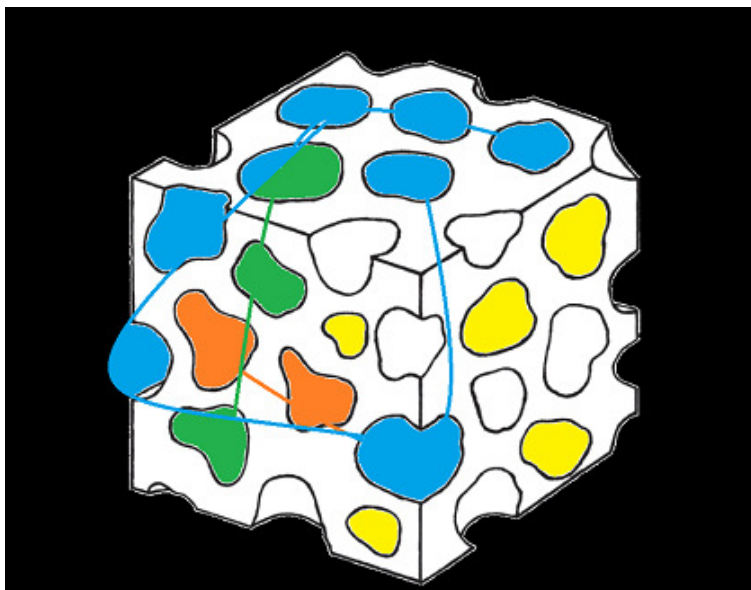


Рис. 2. Условная конфигурация возможных связей, образующих поровое пространство в структуре образца керна

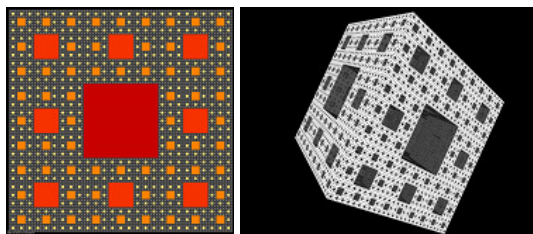


Рис. 3. Ковёр Серпинского <https://yandex.ru/search/?text=%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D1%91%D1%80%20%D0%A1%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20>

характеризуются существенно нелинейной динамикой на крайне сложно устроенном многообразии. В связи с этим представляется важным выработать подходы альтернативных сеточным аппроксимациям, основываясь на идее построения алгоритмов, в которых нелинейная динамика реализуется в виде проекции (информационного сжатия) посредством усреднения данных простой динамики в окрестности заданной точки расчетной области.

Следует подчеркнуть, что в обозримое время невозможно обеспечить прямые вы-



Рис. 4. Ожерелье Антуана

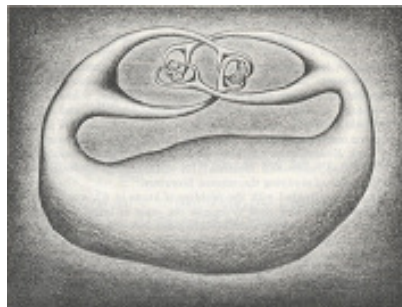


Рис. 5. «Рогатая сфера» Александра

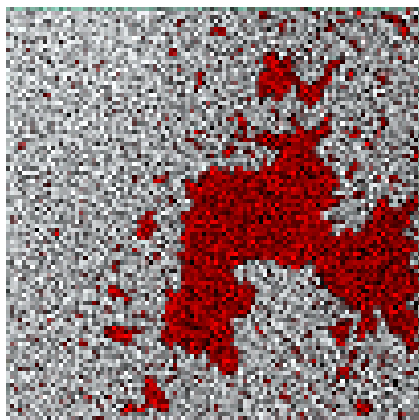


Рис. 6. Локальная структура порового пространства

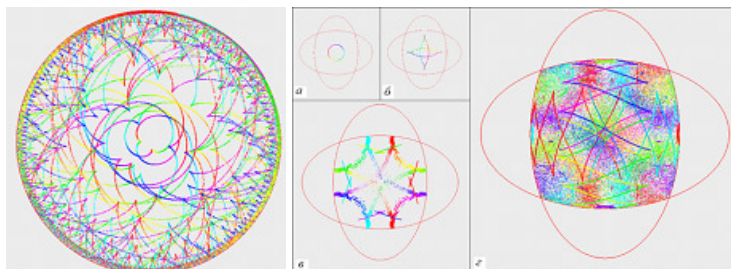


Рис. 7. Многомерный бильярд

числения компьютерные вычисления для восстановления графов связанных точек, находящихся на границе пористого пространства. Для описания динамики жидкости в таких средах следует применять упрощенные математические модели. Эти проблемы связности графов напрямую примыкают к задачам описания нейронных сетей и моделей искусственного интеллекта. Хороший опыт для управляемой динамики в таких композитных средах дает нам нейтронная физика в теории ядерных реакторов.

Описание глобальных структур в приведенных примерах связано с решениями кинетического уравнения Смолуховского, которое непосредственно приводит к нелокальному уравнению Хопфа

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F - F(0, t)] \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad p > 0, \quad t > 0,$$

для преобразования Лапласа распределения плотности связей каналов в структуре пористой среды. Сказанное непосредственно применимо в медицинской физике к реконструкции потоков в сосудах пациента (кровь, плазма и т. д.), основанной на томографических, акустических и других исследованиях посредством решения соответствующих обратных задач.

Для решения данного класса задач эффективным является кинетический подход, основанный на многочастичном процессе коагуляции для локально-однородной среды (Больцман-Смолуховский) как прямое моделирование функции распределения плотности для числа связанных пор. Сюда же примыкает построение искусственной сети связанных пор в однородных средах на основе фрактального сжатия информации для функций распределения. Комбинация законов Дарси и диффузии с экспериментально определенными параметрами в сочетании с Чебышёвским подходом к ЗБЧ позволяет получить модели упрощенной гидродинамики на фрактальных структурах. Эти идеи положены коллективом филиала НИИСИ РАН в гор. Сургуте в основу создания отечественного гидросимулятора для решения задач управляемой динамики жидких углеводородов в условиях реального месторождения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 16-29-15105, 18-47-860005, 18-47-860004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Galkin V.A. Metric Theory of Functional Solutions of the Cauchy Problem for a System of Conservation Laws // *Doklady Mathematics*, 2010, Vol. 81, No. 2, pp. 219–221. © Pleiades Publishing, Ltd., 2010.

ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТЬ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Якобовский М. В.

Рассматриваются алгоритмы, направленные на обеспечение возможности эффективного использования перспективных вычислительных систем эксафлопсного и более высокого уровня производительности. Эксафлопсные вычислительные системы потребуют качественно новых решений для обеспечения самой возможности проведения длительных расчетов, использующих всю доступную вычислительную мощность системы. Одна из важных причин, обуславливающих этот прогноз, связана с неизбежным сокращением времени непрерывной работы между отказами возрастающего числа согласованно

работающих вычислительных устройств суперкомпьютера. Рассматриваются алгоритмы, обеспечивающие независимость времени проведения расчета от наличия в ходе вычислений отказов вычислительных узлов.

Вычислительные системы Экзафлопсной производительности будут состоять из миллионов независимых узлов вычислителей. Такая оценка основана на экстраполяции современных тенденций развития элементной базы вычислительной техники и не учитывает возможность появления новых научных, а также технических прорывов, которые могут коренным образом изменить ситуацию. Вероятность выхода из строя одного из процессоров в этом случае велика. По существующим оценкам, для системы Экзафлопсной производительности, выход из строя хотя бы одного из процессоров будет происходить каждые 20-25 минут. При неизбежном росте производительности свыше 1 Экзафлопса, период бесперебойной работы всей системы будет всё больше сокращаться.

Ликвидация последствий сбоя процессоров традиционно основывается на технологии контрольных точек, в соответствии с которой регулярно, с некоторым интервалом, происходит запись промежуточных данных выполняемых расчетов большой эволюционной задачи. В случае выхода из строя процессора, происходит остановка расчета задачи, перезапуск задачи на новом множестве исправных процессоров и возврат на момент модельного времени, соответствующий последней записи состояния расчета.

Следует отметить, что характерное время записи на общую файловую систему согласованной контрольной точки согласно прогнозам будет составлять десятки минут. Если использовать для расчёта задачи вычислительные мощности свыше одного Экзафлопса, то суперкомпьютер фактически будет работать вхолостую, постоянно возвращаясь к одной и той же контрольной записи и заменяя процессоры.

Рассматриваемая технология предусматривает локальное сохранение промежуточных данных, требующее, по сравнению с записью на общий файловый сервер, меньшего времени, и локальный перерасчет только части расчетной пространственно-временной области, непосредственно примыкающей к неисправному процессору, что позволяет не останавливать расчет на большей части процессоров, создавая эффект исправления ошибки на фоне основного счета.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕЁ ФИЛЬТРАЦИОННО-ЁМКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Губайдуллин А. А., Игошин Д. Е., Губкин А. С.

*Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А.Христиановича СО РАН, г. Тюмень*

Исследование посвящено разработке методов построения различных типов моделей ядра и расчета на их основе фильтрационных параметров. Представлены результаты, полученные по следующим направлениям работы: построение модели пористой среды в виде трехпараметрической периодической структуры, отражающей характерный размер частиц скелета, пористость среды и извилистость каналов; построение двух- и трехмерных моделей пористой среды со случайными микронеоднородностями; прямое численное моделирование течения многофазной жидкости в двух и трехмерных моделях пористой среды; расчет фильтрационных параметров.

Ключевые слова: пористая среда, пористость, проницаемость, периодическая структура, случайная структура, вычислительная гидродинамика.

COMPUTER MODELS OF A POROUS ENVIRONMENT FOR CALCULATING ITS FILTER-CAPACITY PARAMETERS

Gubaidullin A. A., Igoshin D. E., Gubkin A. S.

Tyumen branch of Khristianovich institute of theoretical and applied mechanics, SB RAS, Tyumen

The study is devoted to the development of methods for constructing various types of core models and calculating filtration parameters based on them. The results obtained are reflected in the following areas of work: constructing a model of a porous medium in the form of a three-parameter periodic structure that reflects the characteristic size of the skeleton particles, the porosity of the medium, and the tortuosity of the channels; construction of two- and three-dimensional models of a porous medium with random microinhomogeneities; direct numerical simulation of the multiphase fluid flow in two and three-dimensional models of a porous medium; calculation of filtration parameters.

Keywords: Porous medium, porosity, permeability, periodic structure, random structure, computational fluid dynamics.

В статье представлены результаты работы коллектива авторов по компьютерному моделированию пористых сред и вычислению их фильтрационно – ёмкостных параметров, при этом использованы два подхода: структура пористой среды предполагается периодической либо составленной из случайных микронеднородностей.

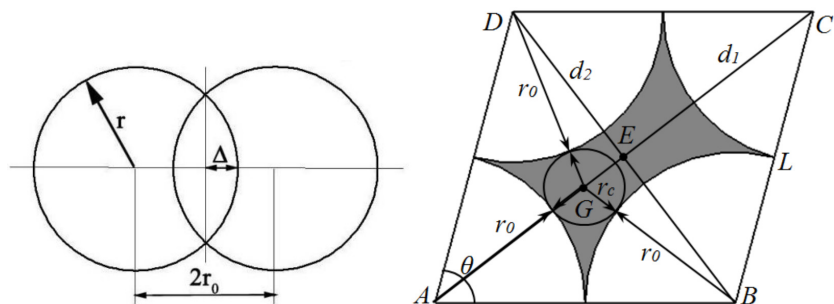


Рис. 1. Схема построения ромбической структуры: перекрытие сфер (слева), одна из граней ромбоэдра при $\alpha = 0$ (справа). Поровое пространство показано серым цветом.

Периодические структуры. При моделировании периодических структур обычно принимают ряд допущений: скелет пористой среды неподвижный и недеформируемый, образован примыкающими друг к другу одинаковыми элементами (шаровыми сегментами), поровые каналы имеют регулярную структуру и образованы пространством между шаровыми сегментами. В [5] предложена модель пористой среды в виде трехпараметрической периодической структуры (рис.1) отражающей характерный размер частиц скелета, пористость среды и извилистость каналов, которая существенным образом влияет на их гидравлическое сопротивление [4]. Модельными параметрами являются сторона ромбоэдра L (определяет характерный размер частиц), степень перекрытия сфер α (влияет на пористость и проницаемость) острый угол θ при вершине ромба

(влияет на взаимное расположение частиц). Получены аналитические выражения для пористости и просветности модельной среды, приведена оценка для проницаемости по методу наименьшей просветности. Для рассмотренной структуры в [7] получена оценка проницаемости на основе обобщенного подхода Козени, разработанного в [1]. Численное моделирование течения вязкой жидкости в открытом пакете OpenFOAM позволило определить проницаемость данной модельной среды на основе уравнения Дарси [9].

На рис.2 показаны варианты вида порового пространства при различных значениях модельных параметров θ и α . Видно, что при $\theta=60^\circ$ и $\alpha=0,1$ поры близки к замыканию.

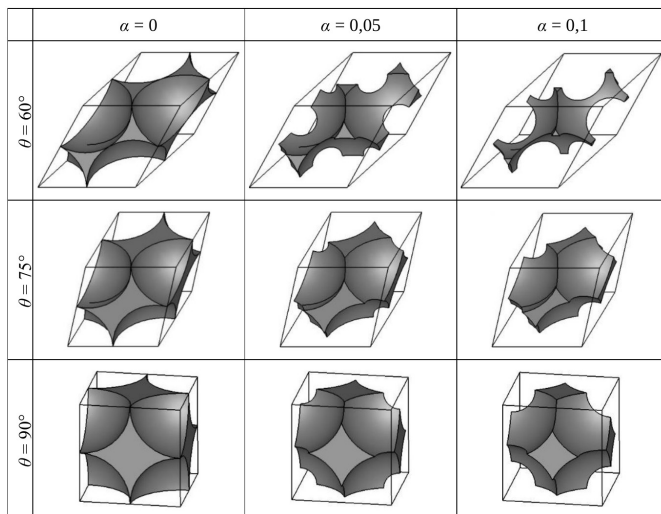


Рис. 2. Поровое пространство в ячейке при различных α и θ

Случайные структуры. При моделировании пористой среды со случайными микронегоднородностями в расчетной области случайным образом располагают элементы скелета, при этом могут накладываться ограничения на их взаимное расположение. В [2] предложен, а в [6] развит способ построения двумерных моделей: в прямоугольной области размером $L_x \times L_y$ (рис. 3) случайным образом размещаются диски радиуса R_i с координатами центра (x_i, y_i) , причем радиус i -го диска выбирается случайным образом из определенного диапазона значений $R_i \in [R_{min}, R_{max}]$. Данный алгоритм легко применим к трехмерному случаю, при этом расчетная область имеет форму параллелепипеда, а элементы скелета — шары. В процессе работы алгоритма отбираются диски (шары), удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} (R_i + R_j) - d_{ij} = \Delta_{ij}^{in} \geq \Delta_{ij}^{in} \geq 0, \\ d_{ij} - (R_i + R_j) = \Delta_{ij}^{out} \geq \Delta_{ij}^{out} \geq 0, \end{cases} \quad j \in [1, i-1].$$

Первое уравнение задает степень сцепления пересекающихся элементов, второе — минимальную ширину каналов, j — индекс, пробегающий номера всех ранее добавленных в расчетную область дисков (шаров). Геометрия порового пространства и расчетные сетки создаются в открытом пакете Salome. Процесс формирования пористой

структуры проиллюстрирован на рис. 3, где слева схематично показано расположение дисков (шаров в некотором сечении) для фиксированного момента времени. Справа показана структура с расчетной сеткой. Процесс прекращается при достижении пористостью заданного значения m .

С использованием открытого пакета OpenFOAM проведено моделирование течения ньютоновской жидкости в пористой среде случайной структуры. Проведены расчеты в широком диапазоне изменения модельных параметров и выполнен анализ их влияния на течение. Данный подход позволяет визуализировать течение в масштабе пор. На рис. 4 представлены рассчитанные поля скорости и давления в среде с пористостью 0.37, построенной из 900 случайно расположенных дисков. На рис. 4А и 4В течение направлено слева направо, на остальных — сверху вниз. Видно, что в обоих случаях имеются поровые каналы, где скорость течения заметно выше, чем в других каналах.

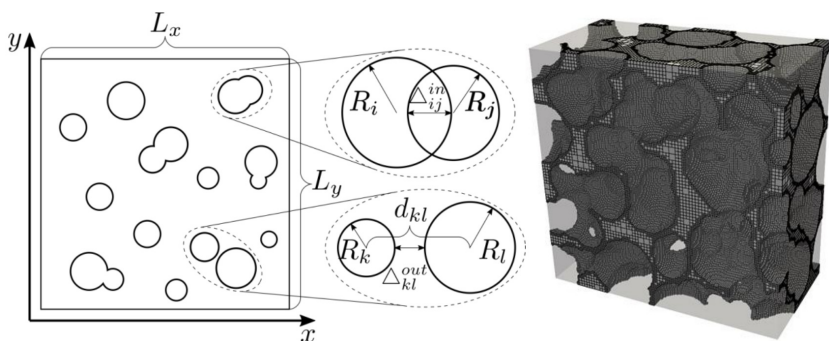


Рис. 3. Расположение элементов в расчетной области (слева) и структура с расчетной сеткой (справа).

Кроме того, вычислялся расход жидкости через пористую структуру и по результатам расчетов на основе уравнения Дарси найдены коэффициенты проницаемости для различных значений пористости.

Течение многофазной жидкости. Практически важной проблемой является определение относительных фазовых проницаемостей в пористых средах. В [3] рассмотрено течение двухфазной жидкости в среде, поровое пространство которой сформировано осесимметричными каналами переменного сечения.

В [8] рассмотрено двухфазное течение с учетом сжимаемости одной из фаз. Предложен подход, суть которого заключается в осреднении по времени объемных расходов фаз. Гидродинамическое моделирование проведено в открытом пакете OpenFOAM. В каждый момент времени рассчитывались объемные расходы обеих фаз. После того, как двухфазное течение становилось квазипериодическим, производилось осреднение объемного расхода обеих фаз за время, кратное периоду такого движения:

$$\langle Q_i \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} Q_i dt, \quad \Delta t = t_2 - t_1, \quad Q_i = \iint_{S_r} \gamma_i u_n ds, \quad i = 1, 2.$$

Сопоставляя найденные объемные расходы с расходами в случае однофазного течения Q_{io} [10], находились относительные фазовые проницаемости при различных на-

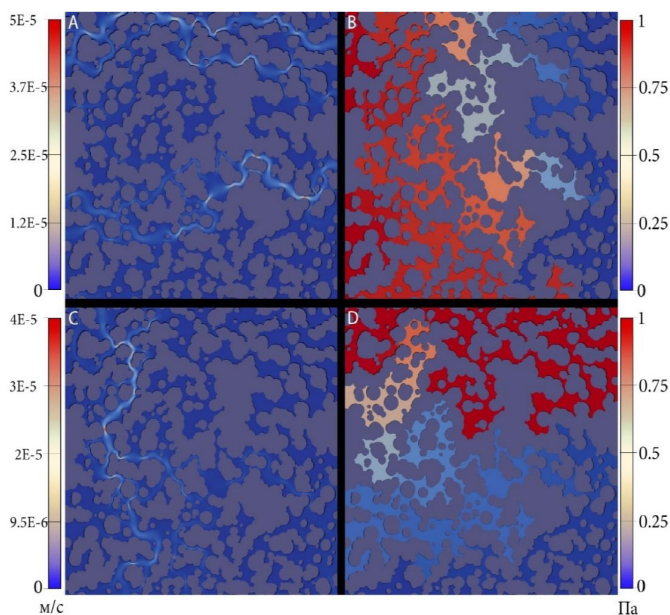


Рис. 4. Поля скорости (A, C) и перепада давления (B, D) для пористой среды со случайными микронеоднородностями при $t = 37\%$ и $N = 900$

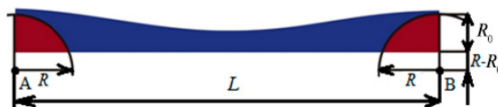


Рис. 5. Схема начального расположения фаз в канале: синий цвет — смачивающая фаза (вода), красный цвет — несмачивающая (нефть)

чальных объемных содержаниях фаз

$$k_i = \frac{\langle Q_i \rangle}{Q_{i0}}.$$

Исследование выполнено в ТюмФ ИТПМ СО РАН при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15119

ЛИТЕРАТУРА

1. Губайдуллин А.А., Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 2. С. 105-120.

2. Губкин А.С., Игошин Д.Е., Трапезников Д.В. Численный расчет проницаемости в двумерной пористой среде со скелетом из случайно расположенных пересекающихся дисков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 4. С. 54-68.
3. Игошин Д. Е. Течение двухфазной жидкости в модельной пористой среде, образованной осесимметричными каналами переменного сечения // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 4. С. 169-180. doi: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-169-180.
4. Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Гидравлическое сопротивление извилистых каналов // Вестник кибернетики. 2016. № 3 (23). С. 8-17.
5. Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Фильтрационно-емкостные свойства периодической пористой среды ромбоэдрической структуры со скелетом из шаровых сегментов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 3. С. 107-127.
6. Gubaidullin A.A., Gubkin A.S., Igoshin D.E., Ignatev P.A. Permeability of model porous medium formed by random discs. AIP Conference Proceedings 1939, 020035 (2018); doi: 10.1063/1.5027347
7. Gubaidullin A.A., Igoshin D.E., Ignatev P.A. Calculation of the permeability of a porous medium of a periodic rhombohedral structure based on the generalized Kozeny method. AIP Conference Proceedings 1939, 020033 (2018); doi: 10.1063/1.5027345.
8. Gubkin A. S., Igoshin D. E. and Filimonova L. N. Calculation of two-phase flow in microchannels of variable section with account of compressibility of one phase AIP Conference Proceedings 2125, 030111 (2019); doi.org/10.1063/1.5117493
9. Igoshin D.E., Gubkin A.S., Ignatev P.A. and Gubaidullin A.A. Permeability calculation in periodic porous medium based on rhombohedral structure. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1128 (2018) 012002 doi :10.1088/1742-6596/1128/1/012002
10. Igoshin D.E., Gubkin A.S., Ignatev P.A., and Gubaidullin A.A. Permeability of a porous medium with axisymmetric channels of variable cross-section. AIP Conference Proceedings 2027, 030052 (2018); doi: 10.1063/1.5065146

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВАКУУМНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ШАРЕ

Бычин И. В.^{1,2}, Гореликов А. В.^{1,2}, Ряховский А. В.²

¹Обособленное подразделение ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН в гор. Сургуте, e-mail: gorelikov_a@list.ru

²Сургутский государственный университет, e-mail: echo87@rambler.ru

В рамках модели классической магнитной гидродинамики рассматривается начально-краевая задача с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля [1]. Для решения уравнения индукции методом контрольного объема использована процедура дискретизации на смещённых сетках [2-4], которая позволяет получить численное решение, удовлетворяющее сеточному уравнению неразрывности. Разработан алгоритм решения начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции в шаре. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа на потенциал магнитного поля в вакууме решается с использованием преобразования обратных радиусов. Разработано программное обеспечение для

численного решения рассматриваемого класса начально-краевых задач. Представлены результаты тестовых расчетов. В качестве теста использована аксиально-симметричная задача о размагничивании шара, для которой получено точное аналитическое решение. Результаты тестов на численную сходимость на последовательности вложенных расчетных сеток демонстрируют, что разработанный алгоритм занимает промежуточное место по порядку аппроксимации по пространственным переменным между схемами первого и второго порядков.

Работа выполнена при поддержке Программы ФНИ государственных академий наук на 2013-2020 гг., проект № 0065-2019-0021.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., 2000. Vol. 358. P. 873–897.
2. Toth G. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // J. Comput. Phys., 2000. Vol. 161. P. 605.
3. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Федосеев Е.Э. Численный метод решения уравнений МГД // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2009. Т. 30. С. 28.
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.

ПОДХОДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гавриленко Т. В.

*Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»
taras.gavrilenko@gmail.com*

Моделирование как нормальных физиологических, так и патологических процессов является в настоящее время одним из самых актуальных направлений в научных исследованиях современной медицины и биофизики. В свою очередь современные методы исследования и приборная база в медицинских исследованиях существенно расширили возможность по изучению динамики вектора состояния организма человека и как следствие любой сложной динамической биологической системы, но при этом возникают проблемы обработки регистрируемой информации от сложных биосистем, находящихся в непрерывном хаосе. Настоящая работа посвящена подходам для описания и моделирования сложных биологических систем.

Ключевые слова: биомеханика, механограммы, теория хаоса, корреляционный анализ, теоретико-множественный анализ.

APPROACHES FOR DESCRIPTION AND MODELING OF COMPLEX BIOLOGICAL SYSTEMS

Gavrilenko T.V.

*Surgut Branch of Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences»
taras.gavrilenko@gmail.com*

Modeling of both normal physiological and pathological processes is currently one of the most relevant areas in scientific research of modern medicine and biophysics. In turn, modern research methods and the instrument base in medical research have significantly expanded the ability to study the dynamics of the state vector of the human body and as a result of any complex dynamic biological system, but there are problems processing the recorded information from complex biosystems in continuous chaos. This paper is devoted to approaches for the description and modeling of complex biological systems.

Keywords: biomechanics, mechanograms, chaos theory, correlation analysis, set-theoretic analysis.

Изучение сложных биологических объектов одна из приоритетных задач. В свою очередь, развитие науки о человеке, как одном из самых сложных биологических объектов, существенно раздвигает возможности человечества в формировании здорового населения и расширяет возможности эффективного существования каждого человека. В данной работе рассматривается моделирование сложных биомеханических систем, при этом в качестве основных биомеханических систем будем рассматривать, такие как нервно-мышечную систему и сердечно-сосудистую систему человека. При рассмотрении нервно-мышечной системы будем разделять состояния нервно-мышечной системы на *нормогенез* и *патогенез*. В свою очередь движения будем разделять на *непроизвольные* и *произвольные*.

Существует множество методов и подходов описания биологических объектов и процессов, протекающих в них. Также существует множество методов и подходов в моделировании биологических процессов, но в подавляющем большинстве модели создаются в рамках детерминистского или стохастического подхода. На практике оказывается, что использование этих подходов эффективно только для описания относительно простых биологических объектов и процессов. Как только исследователи пытаются перейти от описания и моделирования макропроцессов к описанию и моделированию взаимодействия органов, систем и т.д. тут же возникает ряд проблем. При этом, основным камнем преткновения, является невоспроизводимость результатов экспериментов, которая не позволяет четко зафиксировать динамику развития того или иного процесса в рамках детерминистского и стохастического подхода. Например, не возможно в пределах разумного периода времени повторить траектории движения конечностей человека, хотя на первый взгляд движения могут показаться идентичными (см. рис.1).

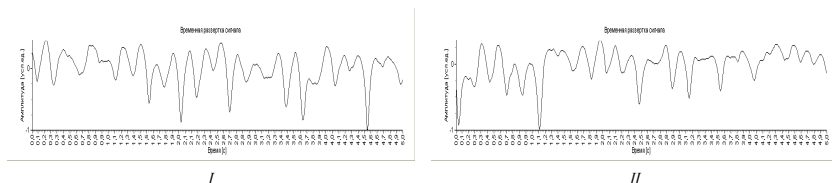


Рис. 1. Тремограммы, снятые с пальцев испытуемой Ske во время выполнения тестинг теста в одинаковых условиях: I — в момент времени t_1 ; II — в момент времени t_2

Использование классических статистических оценок (вероятность события, математическое ожидание, дисперсия) при исследовании биомеханических систем крайне

затруднительно, особенно при исследовании треморограмм, механограмм и т.д.

Рассмотрим некоторые примеры обработки треморограмм и механограмм в рамках стохастического подхода. На первом этапе были проведены серии экспериментов с испытуемой *Day*: 1 – регистрировался постуральный тремор (непроизвольные движения); 2 – регистрировался постуральный тремор под воздействием статической нагрузки, к пальцу был прикреплён груз массой 1,5 кг. (непроизвольные движения); 3 – регистрировались движения пальца руки во время теппинг-теста с физическим ограничением (произвольные движения); 4 – регистрировались движения пальца руки во время теппинг-теста без физических ограничений (произвольные движения). Каждый эксперимент был повторён 30 раз (пороговое значение количества испытаний для статистически значимой выборки), итого 120 измерений. На рис. 2 представлены временные развертки зарегистрированных сигналов.

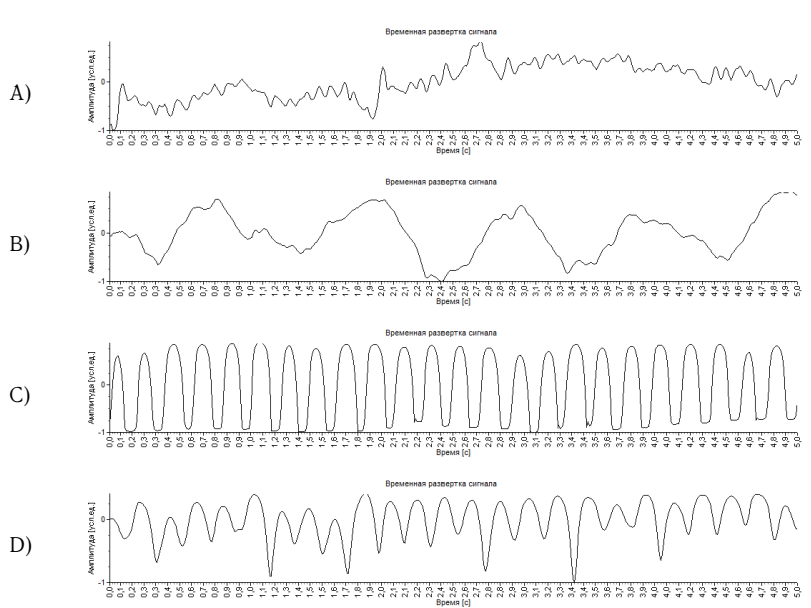


Рис. 2. А) – треморограмма снятая с пальца испытуемой *Day* без внешних воздействий; В) – треморограмма снятая с пальца испытуемой *Day* под воздействием груза массой 1,5 кг; С) – механограмма теппинга в условиях физических ограничений; D) – механограмма теппинга без физических ограничений

Если сопоставить треморограммы или механограммы зафиксированные в одних и тех же условиях, но в разные моменты времени, то увидим, что каждая треморограмма и механограмма обладают уникальностью. Причина такой динамики проявляется в невоспроизводимости результатов подобных экспериментов (невозможно получить идентичные параметры вектора состояния организма человека даже при одинаковых условиях эксперимента), каждый раз регистрируемые показатели (сигналы) уникальны

и более того, уникальностью будет обладать каждый участок регистрируемого сигнала.

Если исходить из общепринятых представлений о биологических динамических системах, то можно сделать предположение о том, что регистрируемый сигнал обладая уникальностью, по внутренним (структурным) свойствам, должен обладать стабильностью и быть сопоставим в различные моменты времени. В противном случае возникает проблема удержания состояния организма человека в пределах нормы (или патологии). В качестве простейшего структурного описателя сигнала может выступать АЧХ регистрируемого сигнала. При анализе реальных экспериментальных данных оказывается, что АЧХ регистрируемых сигналов непрерывно варьирует в широких пределах. Для каждого эксперимента объединим графики АЧХ, результат приведен на рис.3.

АЧХ, как при регистрации тремора, так и при регистрации теппинга, при многократных повторениях эксперимента, обладают высокой вариабельностью. Кривые графиков АЧХ заполняют довольно обширные области и практически не повторяются. На рис.4 представлены графики областей вариабельности векторов состояния организма человека, построенные на основе амплитудно-частотных характеристик терморোগрам и механограм (рис. 3) испытуемой Day.

Построенные области вариабельности (рис. 4) позволяют оценивать состояние организма человека по принадлежности фиксируемых значений параметров вектора состояния организма области вариабельности, при этом любое отклонение от области вариабельности будет говорить о переходе вектора состояния организма человека в другое состояние. Причем, область вариабельности для каждого человека будет различной, как для нормогенеза, так и для различных патологических или возбужденных состояний.

Корреляционный анализ является одним самых популярных методов анализа рядов, данных у исследователей. Позволяющий ответить на вопрос о наличии или отсутствии корреляционной зависимости - статистической взаимосвязи двух или нескольких случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми). При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин.

Рассмотрим пример корреляционного анализа параметров произвольных микродвижений тела человека в процессе удерживания статической позы. Для получения исходных данных было проведено следующее исследование, на голове испытуемых фиксировались два датчика (первый – устанавливался на лобную часть головы испытуемого, второй – на височную часть головы). На первом этапе регистрация микродвижений головы испытуемых происходила в спокойном состоянии без каких-либо внешних воздействий. На втором этапе регистрация параметров микродвижений осуществлялась сразу после динамической нагрузки (тридцать приседаний). После чего организм испытуемых проходил период восстановления в течение 30 минут и затем регистрировались параметры микроперемещений головы под воздействием статической нагрузки (испытуемые на плечах удерживали груз весом 20 кг).

Для визуальной оценки интенсивности дрейфа в пространстве с помощью ЭВМ строилась временная развертка сигнала (треморограмма). Типичная картина полученных результатов представлена на рис.5. Затем был проведен корреляционный анализ для оценки взаимосвязи микроперемещений височной и лобной частей головы до воздействий и под различными воздействиями.

Чаще всего для определения корреляционной зависимости исследователи используют коэффициент ранговой корреляции Спирмена, основная формула расчета коэффи-

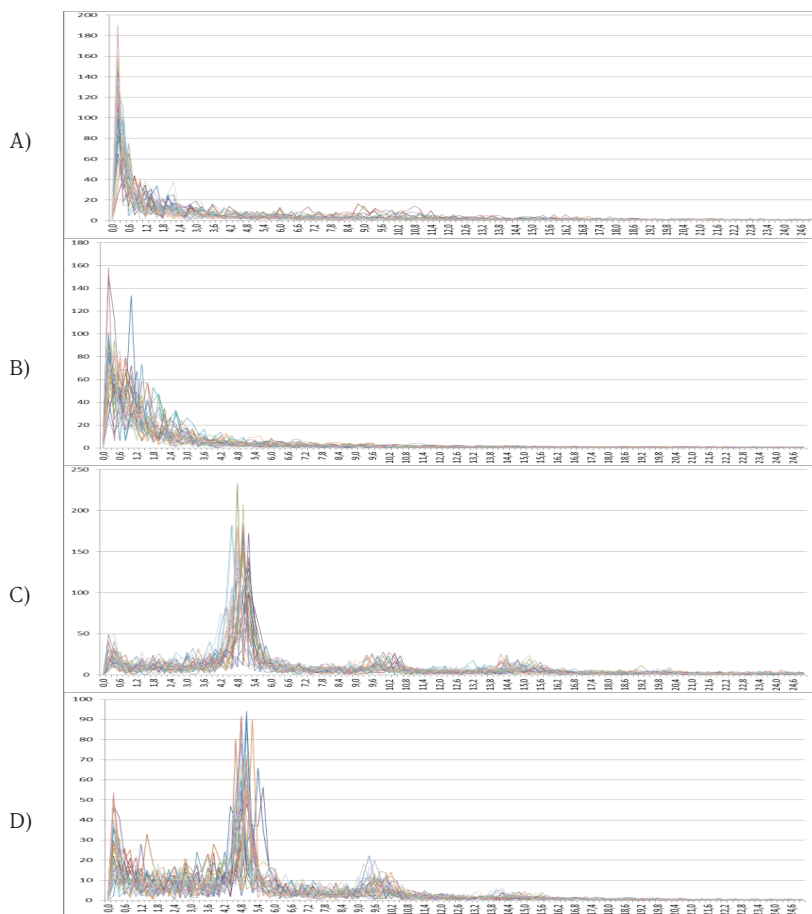


Рис. 3. Суперпозиция амплитудно-частотных характеристик, 30 повторений для каждого эксперимента - А) – тремор испытуемой Day без внешних воздействий; В) – тремор испытуемой Day под воздействием груза массой 1,5 кг; С) – теппинг в условиях физических ограничений; D) –теппинг без физических ограничений

циента имеет следующий вид:

$$K_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (1)$$

где x_i — ранг из значений случайной величины X ;

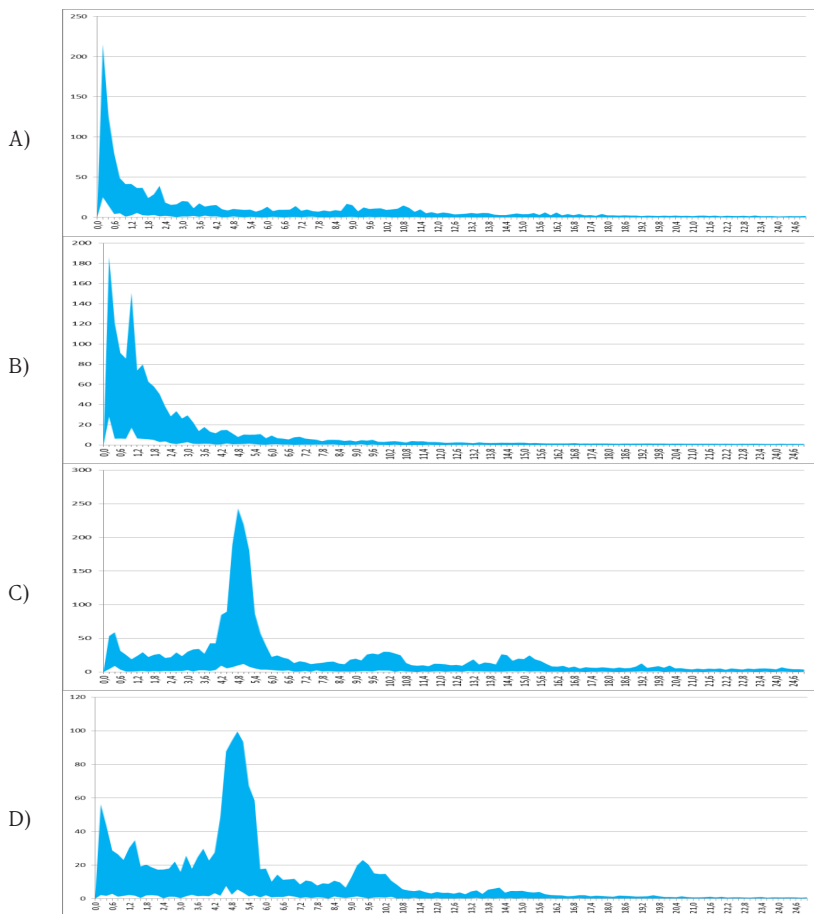


Рис. 4. Области вариабельности, построенные на основе амплитудно-частотных характеристик для каждого эксперимента - А) – тремор испытуемой Day без внешних воздействий; В) – тремор испытуемой Day под воздействием груза массой 1,5 кг; С) –теппинг в условиях физических ограничений; D) –теппинг без физических ограничений

y_i — ранг из значений случайной величины Y ;

n — число парных наблюдений.

В табл.1 представлены расчётные значения коэффициента корреляции.

Из табл. 1 видно, что значения коэффициента корреляции показывают на I и III этапе эксперимента высокую согласованность работы нервно-мышечной системы в процессе удержания статической позы, а на II этапе эксперимента – ниже среднего.

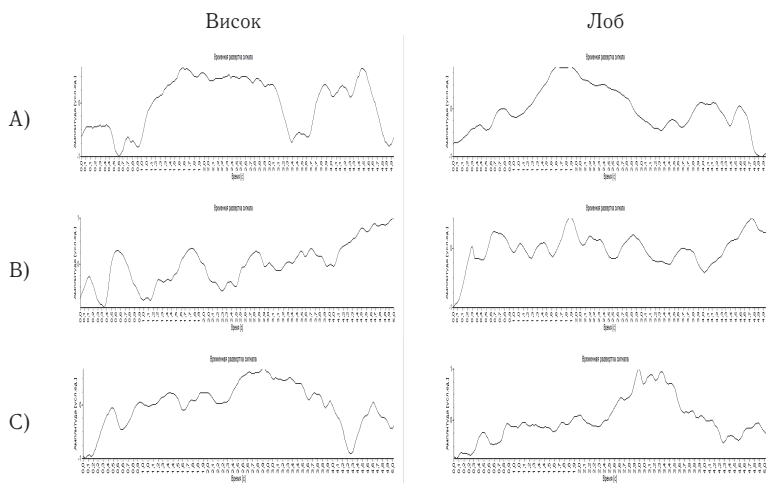


Рис. 5. А – механограммы испытуемого без внешних воздействий. В - механограммы испытуемого под воздействием динамической нагрузки. С - механограммы испытуемого под воздействием статической нагрузки

Таблица 1

Корреляционная матрица между сигналами зафиксированными в височной и лобной частях головы

Этап исследований	Значение коэффициента корреляции
Без внешних воздействий	0,76
Под воздействием динамической нагрузки	0,42
Под воздействием статической нагрузки	0,84

Приведем пример исследования хаотической динамики параметров произвольных микровдвижений тела человека в процессе удерживания статической позы на основе параметров квазиаттракторов.

Определение 1: Квазиаттрактор – наименьшая выпуклая оболочка, содержащая выборку экспериментальных данных. Характеристикой квазиаттрактора является его мера Лебега.

Поскольку наименьшая выпуклая оболочка равна пересечению всех выпуклых оболочек, содержащих экспериментальные данные, то для экспериментальных данных в заданной системе координат квазиаттрактором может служить параллелепипед, содержащий экспериментальные данные.

Определение 2: Квазиаттрактор – пересечение в заданном m -мерном пространстве всех параллелепипедов Q , включающее в себя все реализации случайной величины χ_i^l ($l=\overline{1,m}$, $i=\overline{j,e}$, $[j,e]$, $j \in Z$, $e \in Z$, $j \ll e$) в m -мерном фазовом пространстве L с координатами

натами центра $\overline{M} = \{M^1(\overline{\chi^1}), \dots, M^m(\overline{\chi^m})\}$ расположенного на пересечении главных диагоналей и с длинами сторон $2\sqrt{D^l(\overline{\chi^l})}$ ориентированными параллельно осям координат. Мерой квазиаттрактора V_G принимается его объем, рассчитываемый следующим образом:

$$V_G = mes(Q) = 2^m \sqrt{D^l(\overline{\chi^l})},$$

где m – количество пространственных измерений,

$D^l(\overline{\chi^l})$ – дисперсия случайной величины χ^l в пространственном измерении l .

Для двух параметров квазиаттракторов (его объема V_G и координат его центра x_{ic}) были введены критерии существенных или несущественных изменений сложных биосистем в виде их моделей [1-3].

Типичная картина полученных результатов представлена на рис.6. Каждый вектор перемещения может образовывать фазовую плоскость (в данном случае рассматриваемую в качестве квазиаттрактора), описывающую хаотическую динамику поведения вектора состояния системы. В качестве фазовых координат, помимо координат перемещения x_1 и y_1 , использовались координаты скорости перемещения головы $x_2 = dx_1/dt$, $y_2 = dy_1/dt$.

Рис. 6 демонстрирует существенные различия в хаотической динамике микродвижений тела человека под различными воздействиями (динамическая и статическая нагрузки). Под воздействием динамической нагрузки объемы квазиаттракторов существенно изменяются, в височной части значительно увеличивается, а в лобной части – сокращается. В свою очередь под воздействием статической нагрузки объемы квазиаттракторов становятся сопоставимыми. Если сравнивать полученные значения энтропии Шеннона (рис. 14) и объемы квазиаттракторов (рис. 16), то очевидно, что количественная оценка объемов квазиаттракторов более показательна.

Заключение

Исследования показывают, что применение стандартных подходов к оценке динамики биомеханических движений и состояния человека на основе биомеханических показателей имеют огромное количество ограничений. Необходимо комплексирование методов и использование близких по реализации хаотической динамики, дифференциальных уравнения с разрывной правой частью, у которых нет классических и обобщенных решений [4]. Вышесказанные утверждения являются типичными для задач управления в сложных системах и иллюстрируются следующим примером [4]:

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

$$f(u) = \begin{cases} -1, & u \geq 0, \\ 1, & u < 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет решение, удовлетворяющее определению А.Ф. Филиппова [5]. Для этого рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) \in R_n,$$

$$f(u) = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}) \in R_n.$$

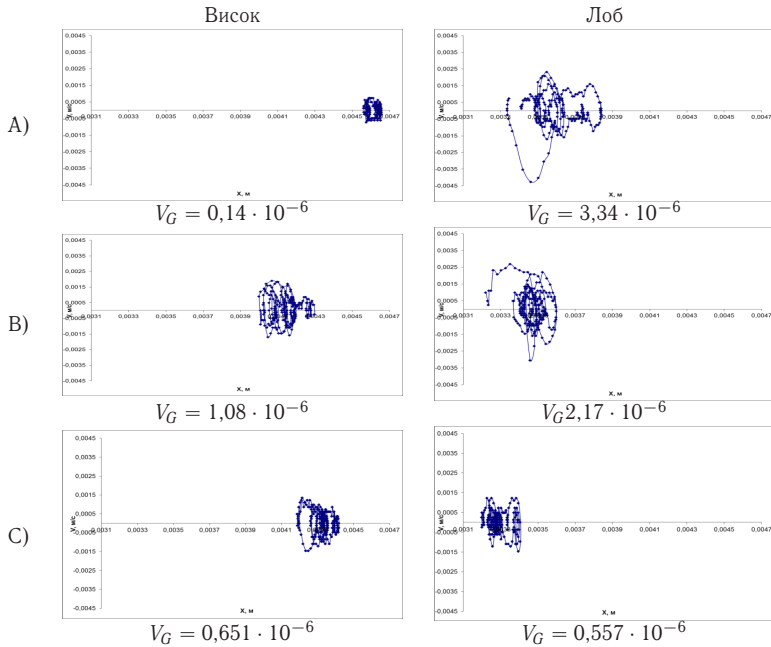


Рис. 6. Фазовые плоскости $x=(x_1, x_2)$ и $y=(y_1, y_2)$ с координатами положения головы испытуемого по отношению к датчику в виде $x_1, x_2=dx_1/dt, y_1, y_2=dy_1/dt$, на основе механограмм представленных на рис. 11: А) — без внешних воздействий В) — под воздействием динамической нагрузки; С) — под воздействием статической нагрузки

Вектор-функция $u(\cdot)$, определенная на интервале (t_1, t_2) , называется Φ -решением (решением А.Ф. Филипова [4]), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ значения

$$\frac{du}{dt} \in \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{d_u(N)=0} \text{conv } f(t, U_{u(t)}(\delta) \setminus N) \stackrel{\text{def}}{=} K\{f, u(t)\}.$$

При этом в качестве одной из мер неопределенности динамики такой системы является объем конуса K .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-47-860005 п_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адайкин В.И. Принципы соответствия в теоретической биологии и медицине (ТБМ) с позиции теории хаоса и синергетики / В.И. Адайкин, А.А. Глушук, В.М. Еськов,

- А.А. Устименко и др. // Материалы открытой окружной конференции в рамках акции «Спаси и сохрани», «Биоресурсы и природопользование в Ханты-мансийском автономном округе» проблемы и решения г. Сургут: Изд-во СурГУ, 2006. – С. 127-130.
2. Eskov V.M. Two types of systems and three types of paradigms in systems philosophy and system science / V.M. Eskov, V.V. Eskov, O.E. Filatova, M.A. Filatov // J. Biomedical Science and Engineering. – 2012. – Vol. 5. P. 602-607.
 3. Бернштейн Н.А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности. — М., 1966.
 4. Галкин В. А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского / В. А. Галкин. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. -408 с.
 5. F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L.-S. Young. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898. Springer-Verlag. 1981, pp. 366-381.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИВЕДЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Панфёров С. В.

*Факультет «Космических исследований» МГУ имени М.В.Ломоносова
Кафедра фундаментальной и прикладной математики*

В статье обосновывается возможность применения обобщенного приведенного метода Ньютона к построению траекторного алгоритма. Устанавливается связь между условиями, накладываемыми на целевую функцию, допустимое множество и множество Куна-Таккера исходной задачи, при которых обеспечивается сходимость траекторного алгоритма.

Ключевые слова: задачи нелинейной оптимизации, траекторный алгоритм, разделение переменных, метод приведенного градиента, сходимость.

Введение

Необходимость решения задач глобальной оптимизации находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. Задачи проектирования, распределения ресурсов, расчета траектории движения встречаются в ряде прикладных областей, в которых необходимо получить наилучший результат целевой функции на множестве некоторых ограничений. Сложность решения задач глобальной оптимизации связана, вообще говоря, с невозможностью гарантировано получить решение за конечное число шагов. Первым вопросом, возникающим при исследовании оптимизационного алгоритма, является вопрос о его сходимости. Необходимо выяснить при каких условиях, и к какому множеству сходится алгоритм и как связано это множество с оптимальным множеством решаемой задачи. В работе исследуются свойства целевой функции и допустимого множества, необходимые для сходимости траекторного алгоритма.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & \bar{f}(x) \rightarrow \min \\ & x \in Q = \{x \in R^n : g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$F(z) \rightarrow \min_{z \in R^{n-m}} \quad (2)$$

Рассмотрим множество:

$$X_*(f, Q) = \{x \in Q \mid \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0 : \forall y \in B_\varepsilon(x) f(x) \geq f(y)\} -$$

множество локальных максимумов функции $f(x)$. Рассмотрим, так же множество:

$$X_{**}(f, Q) = \{x \in Q : \forall y \in Q, f(x) \leq f(y)\}.$$

Другой вариант постановки задачи (1), состоит в нахождении

$$x_{**} \in X_{**}. \quad (3)$$

Очевидно, что решение задачи (1) принадлежит множеству локальных минимумов функции $f(x)$ т.е.

$$X_{**}(f, Q) \subset X_*(f, Q).$$

Пусть, $X_* \neq X_{**}$ т.е. задача (1) является многоэкстремальной. В таких задачах могут существовать точки локального максимума отличные от точек глобального максимума.

Рассмотрим множество стационарных точек функции $f(x)$ на множестве Q

$$X_S(f, Q) = \{x \in Q \mid \nabla f(x) = \vec{0}\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \forall x_i \in Q \quad & \|f(x_i)\| \leq k_0, \|\nabla f(x_i)\| \leq k_1, \left\| \nabla^2 f(x_i) \right\| \leq k_2, \\ \forall x_1 x_2 \in Q \quad & |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_0 |x_1 - x_2|, |\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)| \leq L_1 |x_1 - x_2|, \\ & \left| \nabla^2 f(x_1) - \nabla^2 f(x_2) \right| \leq L_2 |x_1 - x_2| \quad (4) \end{aligned}$$

Определить достаточное для решения задачи (1) количество элементов X_S несложно лишь в случае простейшей структуры множества X_S . Например, X_S несвязно и не представимо декартовым произведением множеств меньшей размерности.

Рассмотрим возможность использования свойств целевой функции $f(x)$ и множества Q , например, нас будут интересовать такие множества $\bar{X} \subset Q$, имеющие лучшие структурные свойства чем $X_S \subset \bar{X}$ и задача определения всех элементов множества X_S в $\bar{X}$ является более простой чем задача (3).

2. Описание алгоритма

Суть алгоритма обобщенного приведенного метода Ньютона состоит в следующем.

На первом этапе строится касательное подпространство $N(x^k)$ размерности $n - m$ к множеству ограничений и выбирается координатное подпространство $E(I)$ той же размерности $n - m$.

Через $E(I)^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к $E(I)$.

Аналогично алгоритмам с исключением переменных координат, происходит разбиение переменной x^k на пару переменных (y^k, z^k) следующим образом

$$x^k = y^k + z^k, y^k \in E(I)^\perp, z^k \in E(I).$$

Функция $y^k = \varphi(z^k)$ определяется как решение системы нелинейных уравнений $g_i(y^k, z^k) = 0, i = 1, 2, \dots, m$.

В условиях теоремы о неявных функциях, в окрестности точки z^k определена приведенная целевая функция $F(z) = f(\varphi(z), z)$ (см. [1, стр.280]).

Таким образом, задача (1) сводится к задаче безусловной оптимизации (2):

$$F(z) \rightarrow \min \\ z \in R^{n-m}$$

На втором этапе происходит сдвиг по методу Ньютона в координатном подпространстве

$$E(I) : z^{k+1} = z^k - (F''(z^k))^{-1} F'(z^k),$$

При этом проверяется условие релаксации: $F(z^{k+1}) < F(z^k)$.

Далее, решая уравнение $y^{k+1} = \varphi(z^{k+1})$, например, модифицированным методом Ньютона, получаем следующую допустимую точку $x^{k+1} = y^{k+1} + z^{k+1}$.

Обоснование замены касательной плоскости координатной плоскостью той же размерности, т.е. возможность разбиения пространства R^n обеспечивает нетривиальная нижняя оценка (см. [2 стр.384]) угла между касательной плоскостью $N(x^k)$ и координатной $E(I)$ в случае $\dim N(x^k) = \dim E(I)$:

$$\cos \text{ang}(N(x^k), E(I)) \geq \frac{1}{\sqrt{m(n-m)+1}}.$$

Отметим, что эта оценка, является общей характеристикой евклидова пространства и зависит только от размерностей задачи.

3. Условия применимости и сходимости алгоритма

Пусть $h = h_1, h_2, \dots, h_m$ - линейно независимая система векторов в $R^n, m \leq n$

Множество

$$\overline{X_{QS}} = \{x \in R^n : \langle \nabla f(x), h_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

называют квазистационарным множеством функции $f(x)$.

Множество

$$X_{QS(h)} = \{x \in Q : \langle \nabla f(x), h_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

называют квазистационарным множеством задачи (1).

Очевидно, что

$$\forall h \ X_S(f, Q) \subset X_{QS(h)}.$$

Если $m = n - 1$, то будем говорить о квазистационарной кривой - траектории, обозначая её через $X_{T(h)}$.

Пусть $e = e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис в R^n . При фиксированном h используем следующие обозначения.

$$F_{QS}(x) = \langle \nabla f(x), h_i \rangle, \Phi_{QS}(x) = \left\langle \left(\nabla^2 f(x) h_i \right), e_j \right\rangle \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n..$$

Рассмотрим задачу: нахождения $x_{**} \in \overline{\overline{X}}$, где

$$\overline{\overline{X}} \left\{ x \in \overline{X_{QS}} | \forall y \in X_{QS(h)} f(x) \geq f(y) \right\} \quad (5)$$

Обозначим через

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle F_{QS}(x), \lambda \rangle -$$

функцию Лагранжа задачи (5), а через

$$K_{QS(h)} = \left\{ x \in X_{QS(h)} \mid \min_{\lambda \in R^{n-m}} \|L'_x(x, \lambda)\| = 0 \right\} -$$

множество Куна-Таккера задачи(5).

Решение задачи(5) связано с возможностью найти все элементы $K_{QS(h)}$.

Последовательность точек, порождаемая алгоритмом Обобщенного приведенного метода Ньютона, принадлежит, поэтому необходимыми условиями эффективного применения метода являются:

- выполнение условий (4) на функцию $f(x)$
- минимально возможное количество связных компонент множества $X_{QS(h)}$
- минимально возможное количество связных компонент множества $K_{QS(h)} \setminus X_S$
- выполнение условий Морс-регулярности для точек множества $K_{QS(h)}$.

Эти условия дают возможность применить алгоритм, выделяют классы функций для которых количество задач (5) минимально и обеспечивают сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии.

Лемма 1. Пусть в задаче (5) $x_{**} \in \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{X}} \left\{ x \in \overline{X_{QS}} | \forall y \in X_{QS(h)} f(x) \geq f(y) \right\}$ выполнены условия (4), $\dim h = n - m, \forall x \in X_{QS} \det \left(\Phi_{QS}(x) \Phi_{QS}(x)^T \right) > 0$

Тогда связные компоненты X_{QS} компактны и если $\exists \varepsilon > 0$, и выполнено условие связности компонент $\overline{X_{QS}}$ в Относительно $Q_\varepsilon = \{x \in R^n : \rho(x, Q) \leq \varepsilon\}$, то число связных компонент конечно.

Доказательство. Из дифференциальных свойств функций $f(x), L(x, \lambda)$ (см.[3, Глава2, стр. 10]) следует замкнутость множества X_{QS} , а следовательно и его компактность.

Пусть точка $x_0 \in M_\alpha$ где M_α -связная компонента X_{QS} .

Пусть пространство E_1 - ортогональное X_{QS} , E_2 касательное к X_{QS} .

Рассмотрим разбиение R^n на E_1, E_2 в точке $x^0 = (y_{E_1}^0, z_{E_2}^0)$, причем

$$\left\| \nabla_{E_1} F_{QS}(x^0)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Пусть

$$S_{r, \rho}(x^0) = \left\{ \|y_{E_1} - y_{E_1}^0\| \leq r, \|z_{E_1} - z_{E_1}^0\| \leq \rho \right\},$$

где $r = r(\lambda_0 L_1, L_2), \rho = \rho(\lambda_0 L_1, L_2)$ определяются теоремой о неявной функции и не зависят от точки x^0 .

Пусть $\bar{r} = \min(r, \rho, \varepsilon)$, тогда для любой точки $x' \in X_{QS} \setminus M_\alpha$ справедливо

$$B_{\bar{r}}(x') \subset Q_\varepsilon, B_{\bar{r}}(x^0) \subset Q_\varepsilon, \|x' - x^0\| \geq \bar{r}.$$

Выберем на каждой связной компоненте M_α , по одной точке x_α , тогда $\|x_\alpha - x_\beta\| \geq \bar{r}, \alpha \neq \beta$. Из компактности Q следует конечность сетки $\{x_\alpha\}$ т.е. конечность числа связных компонент M_α .

Таким образом, в простых предположениях $X_{QS(h)}$ состоит из конечного числа компонент. Важным частным случаем является случай когда $X_{QS(h)}$ состоит из единственной связной компоненты т.е. является односвязной.

Пусть $h_{n-m} = e_0^1, e_0^2, \dots, e_0^{n-m}, w_{n-m} = x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, v_{n-m} = x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$.

Тогда

$$F_{QS(h_{n-m})}(x) = \frac{\partial f}{\partial w_{n-m}}(x) = f'_{w_{n-m}}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = 1, 2, \dots, n-m.$$

Лемма 2. Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial w_{n-m}^2}(x) < 0$ и $\forall x \in R^n$ выполнено условие связности компонент $X_{QS}(h_{n-m})$ в Q относительно R^n . Тогда $X_{QS(h_{n-m})}$ -односвязное.

Доказательство. Функция $f(x)$ является сильновогнутой по $w = w_{n-m} \forall v = v_{n-m}$

Тогда

$\forall v \exists! w(v) : f'_w(x) = 0$ т.е. $(w(v), v) \in X_{QS}$.

Значит по Лемме 1, X_{QS} состоит из единственной связной компоненты.

Лемма 3. Пусть имеется разбиение пространства $R^n = E_1 \times E_2$

Если для некоторого $z_{E_2}^0 \in E_2 \exists! y_{E_1}^0 \in E_1$ такой, что

$$\begin{aligned} 1) & F_{QS}(y_{E_1}^0, z_{E_2}^0) = 0, \\ 2) & \forall x \in X_{QS} \det(\nabla_{E_1} F_{QS}(x)) \neq 0, \\ 3) & \forall z \in E_2 \lim_{\|y_{E_1}\| \rightarrow \infty} \|F_{QS}(y_{E_1}, z_{E_2})\| = \infty. \end{aligned}$$

Тогда X_{QS} - односвязное.

Доказательство. Из [4, стр.157] и [5, стр.112] по условиям 1-3 следует, что существует неявная функция $y_{E_1}(z_{E_2})$, определенная для всех $z_{E_2} \in E_2$ причем $X_{QS} = \{x = (y_{E_1}(z_{E_2}), z_{E_2})\}$, где $z_{E_2} \in E_2$ тогда по условию связности компонент следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть в задаче(5) выполнено условие

$$\forall x \in X_{QS(h_{n-m})} \det(F_{QS}(x), F_{QS}(x)^T) > 0,$$

тогда

$$\forall u_{n-m} = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-m}}; 1 \leq i_1 < \dots < i_{n-m} \leq n \text{ rang}(f''_{w_{n-m}u_{n-m}}(x)) \geq n - 2m$$

Доказательство. Условие:

$$\forall x \in X_{QS(h_{n-m})} \det(F_{QS}(x), F_{QS}(x)^T) > 0$$

означает, что $\text{rang}(F_{QS}(x)) = n - m$, а матрица $f''_{w_{n-m}u_{n-m}}(x)$ получается из матрицы $F_{QS}(x)$ вычеркиванием m столбцов. При вычеркивании же каждого столбца, ранг матрицы уменьшается не более чем на 1.

Связь между множествами $K_{QS(h_{n-m})}$ и X_S , при выполнении условий лемм 1-4, устанавливает теорема.

Теорема. Пусть

$$\forall x \in K_{QS(h_{n-m})} \text{ rang}(F_{QS}(x)) = n - m,$$

тогда

$$K_{QS(h_{n-m})} = X_S.$$

Доказательство. Очевидно, что $X_S \subset K_{QS(h_{n-m})}$. Пусть $x^* \in K_{QS(h_{n-m})}$, $\lambda_* \in R^{n-m}$ и $L'_x(x^*, \lambda_*) = 0$.

Кроме того $x^* \in X_{QS(h_{n-m})}$ В.5. $f'_{w_{n-m}}(x^*) = \overrightarrow{0_{n-m}}$.

$$\text{Тогда} \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial w_{n-m}^2}(x^*) \right)^T \times \lambda_* = \overrightarrow{0_{n-m}} \\ \frac{\partial f}{\partial v_{n-m}}(x^*) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial w_{n-m}^2}(x^*) \right)^T \times \lambda_* = \overrightarrow{0_m} \end{cases}$$

Так как $\frac{\partial^2 f}{\partial w_{n-m}^2}(x^*)$ невырожденная, то $\lambda_* = \overrightarrow{0_{n-m}}$. Значит $f'_{v_{n-m}}(x^*) = \overrightarrow{0_m}$, откуда следует, что $\nabla f(x^*) = \overrightarrow{0_n}$. Поэтому $K_{QS(h_{n-m})} \subset X_S$.

Таким образом, показана связь между условиями, накладываемыми на целевую функцию, допустимое множество и множество Куна-Таккера исходной задачи, при которых обеспечивается сходимость траекторного алгоритма.

4. Заключение

В настоящее время при разработке алгоритмов оптимизации необходимо учитывать состояние вычислительной техники. Для описанного метода сформулированы условия, обеспечивающие его сходимость, и в дальнейшем планируется исследовать вопрос об усовершенствовании алгоритма с помощью параллельных вычислений и практическом применении для решения задач оптимизации большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Панфёров С.В. Оценка качества разделения переменных в обобщенном приведенном методе Ньютона. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология» посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (1908-1988). Тезисы докладов. Москва 17-22 июня 2008 г. М.: МАКС Пресс, 2008. С. 383–384.
3. Завриев С.К. Стохастические градиентные методы решения минимаксных задач. М.: Издательство МГУ, 1984.
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Издательство МГУ, 1980.
5. Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974.

РОЛЬ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

Кушниренко А. Г.¹, Леонов А. Г.^{1,2,3}

¹ ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН

² Московский Государственный Университет

³ Московский Педагогический Государственный Университет

Внедрение цифровой экономики в РФ предусматривает глобальные изменения во всех сферах жизни общества, в том числе и в области образования. Темпы цифровизации образования и широта развертывания цифровой образовательной среды должны соответствовать целям и задачам современных образовательных процессов. Программирование, как одна из 4-х важнейших компетенций (чтение, письмо, арифметика и программирование), подразумевает поэтапное освоение предмета начиная с дошкольных образовательных учреждений, где закладывается фундамент будущей компетенции в области информатики, непрерывно продолжаясь в рамках общеобразовательного курса информатики в начальной и основной школах, переходя к освоению учениками и студентами программ профильных курсов в старшей школе и университетах. Введение в алгоритмизацию базируется на пиктографической цифровой учебной системе «ПиктоМир». В 2016-2019 году «ПиктоМир» успешно внедрена в образовательный процесс в г.Сургут (6000 детей в дошкольных образовательных учреждениях ежегодно проходят вводный курс по алгоритмике). Продолжением курса в младших классах школы осуществляется плавный переход от пиктографической учебной системы программирования к гибридной цифровой образовательной среде, соединяющей в себе простоту и синтаксическую корректность пиктографического языка, и элементы текстового программирования. Подобные системы позволяют не только успешно освоить пропедевтический курс программирования, но и оказывают поддержку смежных дисциплин в начальной и основной школе. В основной школе курс завершается цифровой учебной системой программирования «КуМир» на алгоритмическом языке с национальной лексикой. Как результат, переход к профессиональным языкам программирования в старшей школе и университетах становится вполне посильной задачей для каждого школьника и студента. Вся цифровая деятельность учеников на протяжении всего непрерывного курса информатики фиксируется в цифровой образовательной среде, которая не только накапливает данные о результатах обучения конкретных учеников и студентов, но и помогает педагогу решать проблему равенства в образовательном процессе, когда отстающим ученикам не хватает внимания учителя. Цифровая образовательная среда на основании непрерывно проводимого анализа формирует и предлагает педагогу индивидуальные образовательные треки для учеников и студентов, базируясь на их личностных показателях в области предметной компетенции.

Ключевые слова: цифровизация образования, индивидуальный образовательный трек, система программирования, алгоритмика, ПиктоМир, КуМир.

THE ROLE OF PROGRAMMING IN THE CONTINUOUS COURSE OF COMPUTER SCIENCE

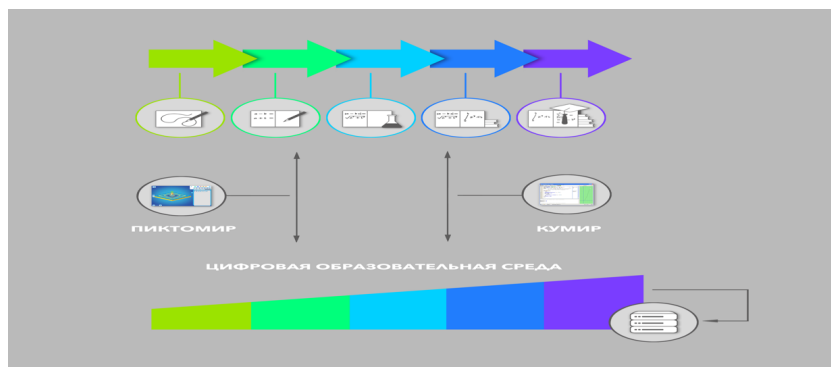
Kushnirenko A. G.¹, Leonov A. G.^{1,2,3}

¹ SRISA/NIISI RAS

² Moscow State University

³ Moscow Pedagogical State University

The start of a digital economy in the Russian Federation provides for global changes in all spheres of society, including in the field of education. The pace of digitalization of education and the breadth of deployment of the digital educational environment should be consistent with the goals and objectives of modern educational processes. Programming as one of the 4 most important competences (reading, writing, arithmetic and coding) implies a gradual mastering of the subject starting with preschool educational institutions, where the foundation is laid for future computer science competence, continuing as part of the general education computer science course in primary and basic schools, moving to the



development of pupils and students of programs of specialized courses in high school and universities. The introduction to algorithmization is based on PiktoMir pictographic digital training system. In 2016-2019, PiktoMir was successfully introduced into the educational process in Surgut (6,000 children in pre-school educational institutions annually undergo an introductory course on algorithms). The continuation of the course in elementary school makes a smooth transition from a pictographic educational programming system to a hybrid digital educational environment that combines the simplicity and syntax correctness of the pictographic language and elements of text programming. Such systems allow not only to successfully master the propaedeutic programming course, but also provide support to related disciplines in primary and basic schools. At the basic school, the course is completed with a digital system "Kumir" programming in an algorithmic language with national vocabulary. As a result, the transition to professional programming languages in high school and universities becomes quite a feasible task for every student and student. All digital activity of students throughout the continuous course of computer science is fixed in the digital educational environment, which not only accumulates data on the learning outcomes of specific students and students, but also helps the teacher to solve the problem of equality in the educational process, when lagging students lack the teacher's attention. Based on the ongoing analysis, the digital educational environment forms and offers the teacher individual educational tracks for pupils and students, based on their personal indicators in the field of subject competence.

Keywords: digitalization of education, individual educational track, programming system, algorithmic, PiktoMir, KuMir.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Нестеров А. В.
г. Москва

Построено асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малыми нелинейностью и диффузией. Показано, что при определенных условиях главный член асимптотического разложения

описывается уравнением, являющимся обобщением уравнения Бюргерса – Кортевега – де Фриза.

Ключевые слова: система уравнений переноса, диффузия, сингулярное возмущение, асимптотическое разложение, уравнение Бюргерса – Кортевега – де Фриза.

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM OF TRANSPORT EQUATIONS WITH LITTLE MUTUAL DIFFUSION

Nesterov A. V.

Moscow

An asymptotic expansion of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of transport equations with small nonlinearity and diffusion is constructed. It is shown that under certain conditions the leading term of the asymptotic expansion is described by the equation that is a generalization of the Burgers – Korteweg – de Vries equation.

Keywords: system of transport equations, diffusion, singular perturbation, asymptotic expansion, Burgers – Korteweg – de Vries equation.

Постановка задачи

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малыми нелинейностью и диффузией

$$\varepsilon^2(U_t + DU_x) = AU + \varepsilon F(U) + \varepsilon^3 B(U)U_{xx}, |x| < \infty, t > 0, \quad (1)$$

$$U(x, 0) = H\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2)$$

Здесь U – решение, ε – малый положительный параметр, D – диагональная матрица, $F(U)$, $B(U)$ достаточно гладкие, гладкая функция $\omega(x)$ быстро убывает вместе со всеми производными. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор h_0 , вектор h^*_0 – собственный вектор матрицы A^T , отвечающий нулевому собственному значению, на ненулевые собственные значения матрицы A накладывается условие $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Дополнительно требуется, чтобы

$$(F(Z), h^*_0) = 0, B^T(Z)h^*_0 = 0 \quad \forall Z. \quad (3)$$

Основная цель настоящей работы – получение уравнения для главного члена асимптотики решения по малому параметру и обобщить полученные в [2], [3] результаты на более общие системы, а так же исследовать влияние взаимной диффузии на процессы переноса в многофазных средах.

Асимптотическое разложение (АР) решения строится методом пограничных функций [1] и имеет вид

$$\begin{aligned} U(x, t) &= S(\zeta, t) + \Pi(\xi, \tau) + R_N = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta, t) + \Pi_i(\xi, \tau)) + R_N = U_N + R_N, \\ \zeta &= (x - Vt)/\varepsilon, \xi = x/\varepsilon, \tau = t/\varepsilon^2, V = (Dh_0, h^*_0)/(h_0, h^*_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Построение членов АР подробно описано в работах [2], [3] и других. В соответствии с погранслоиным методом А. В. Васильевой и В. Ф. Бутузова [1] представим нелинейные функции в виде

$$\begin{aligned} F(U) &= F(\bar{U} + S + \Pi + R) = \bar{F} + SF + \Pi F + RF, \\ B(U) &= B(\bar{U} + S + \Pi + R) = \bar{B} + SB + \Pi B + RB. \end{aligned} \quad (5)$$

Построение АР.

1. Построение

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t). \quad (6)$$

Это слагаемое играет вспомогательную роль.

Подставляем ряд в систему

$$\varepsilon^2(\bar{U}_t + D\bar{U}_x) = A\bar{U} + \varepsilon F(\bar{U}) + \varepsilon^3 B(\bar{U})\bar{U}_{xx}, \quad (7)$$

и стандартным способом (ст. сп.) [1] получаем уравнения для членов разложения.

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : A\bar{u}_0 = 0, \\ \varepsilon^1 : A\bar{u}_1 = -F(\bar{u}_0), \\ \varepsilon^2 : A\bar{u}_2 = \bar{u}_{0,t} + D\bar{u}_{0,x} - F'_u(\bar{u}_0)\bar{u}_1 \\ \dots \end{cases}$$

Уравнение при ε^1 разрешимо в силу условия $(3)(F(Z), h^*_0) = 0 \forall Z$.

Отсюда

$$\begin{cases} \bar{u}_0(x, t) = u_0(x, t)h_0, \\ \bar{u}_1 = u_1(x, t)h_0 - GF(\bar{u}_0). \end{cases}$$

Здесь G – псевдообратный к A оператор, u_0 и u_1 – скалярные функции.

Записывая условие разрешимости уравнения при ε^2 и преобразуя его с учетом условия (3), получаем уравнение для u_0 :

$$u_{0,t} + Vu_{0,x} = 0, V = (Dh_0, h^*_0)/(h_0, h^*_0). \quad (8)$$

При поставленных начальных условиях (2)

$$u_0(x, 0) = 0 \Rightarrow u_0(x, t) \equiv 0 \forall x, t.$$

2. Построение

$$S(\zeta, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i s_i(\zeta, t), \quad \zeta = (x - Vt)/\varepsilon. \quad (9)$$

Функция S есть решение системы

$$\varepsilon^2(S_t + DS_x) = AS + \varepsilon SF + \varepsilon^3 SBS_{xx}, |\zeta| < \infty, t > 0. \quad (10)$$

Переходя к переменным (ζ, t) , с учетом $\bar{U} = 0$ получаем

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon(D - V)S_\zeta = AS + \varepsilon F(S) + \varepsilon B(S)S_{\zeta\zeta}, \quad (11)$$

Ст. сп. [1] получаем уравнения для членов разложения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 : As_0 = 0, \\ \varepsilon^1 : As_1 = (D - V)s_{0,\zeta} - F(s_0) - B(s_0)s_{0,\zeta\zeta}, \\ \varepsilon^2 : As_2 = s_{0,t} + (D - V)s_{1,\zeta}D\bar{u}_{0,x} - F'_u(s_0)s_1 - (B'_u(s_0)s_1s_{0,\zeta\zeta} + B(s_0)s_{1,\zeta\zeta}) \\ \dots \end{array} \right.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} s_0 &= \varphi_0(\zeta, t)h_0, \\ s_1 &= \varphi_1(\zeta, t)h_0 + G((D - V)h_0\varphi_{0,\zeta} - F(\varphi_0h_0) - B(\varphi_0h_0)h_0\varphi_{0,\zeta\zeta}), \end{aligned}$$

Записывая разрешимости уравнения при ε^2 , после преобразований с учетом условия (3), получаем уравнение для определения φ_0 . После введения дополнительных обозначений оно принимает вид

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{eff}(\varphi_0))'_\zeta + (B_{eff}(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta\zeta})'_\zeta = 0. \quad (12)$$

Здесь $M, F_{eff}(\varphi_0), B_{eff}(\varphi_0)$ выражаются через данные уравнения (1).

В развернутой форме уравнение (12) имеет вид

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + 2k\varphi_0\varphi'_{0,\zeta} + (B'_\zeta(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta\zeta} + B(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta}) = 0. \quad (13)$$

Это уравнение можно назвать обобщенным уравнением Бюргерса – Кортевега – де Фриза. При квадратичной функции $F(u)$ и постоянной матрице $B(u)$ уравнение приобретает вид уравнения Бюргерса – Кортевега – де Фриза

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + 2k\varphi_0\varphi_{0,\zeta} + B\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0. \quad (14)$$

3. Построение

$$\Pi(\xi, \tau) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i p_i(\xi, \tau), \quad \xi = x/\varepsilon, \tau = t/\varepsilon^2, \quad (15)$$

производится стандартно [1]. Функция Π есть решение системы

$$\varepsilon^2(\Pi_t + D\Pi_x) = A\Pi + \varepsilon\Pi F + \varepsilon^3\Pi B\Pi_{xx}, \quad |\xi| < \infty, \tau > 0. \quad (16)$$

Главное слагаемое определяется как решение СОДУ

$$p_{0,\tau} = Ap, \quad |\xi| < \infty, \tau > 0. \quad (17)$$

Начальные условия для φ_0 и p_0 определяются совместно, с добавлением условия ограниченности p_0 при $\tau \rightarrow \infty$:

$$p_0 + \varphi_0|_{t=0} = U(x, 0) = H\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad |p_0(\xi, \infty)| < \infty. \quad (18)$$

Решение системы (17) с начальным условием (18) и условием на бесконечности существует и удовлетворяет оценке

$$p_0 + \varphi_0|_{t=0} = U(x, 0) = H\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad |p_0(\xi, \tau)| < \exp(-\kappa\tau), \kappa > 0. \quad (19)$$

Остальные p_i определяются как решения линейных неоднородных СОДУ и удовлетворяют аналогичным оценкам.

Оценка остаточного члена

Оценка остаточного члена проведена по невязке. Пусть все функции имеют производные до $N+3$ -го порядка в области $\|U\| < C$, $C > 0$, и пусть $\|U(x,0)\| < C\delta$, $\delta > 0$. Тогда справедлива

Теорема. Решение задачи (1) - (2) представимо в виде

$$\begin{aligned} U(x,t) &= S_{N+3}(\zeta,t) + \Pi_{N+3}(\xi,\tau) + R_{N+3} = \\ &= \sum_{i=0}^{N+3} \varepsilon^i (s_i(\zeta,t) + \Pi_i(\xi,\tau)) + R_{N+3} = U_{N+3} + R_{N+3}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $S+\Pi$ - построенное АР, а остаточный член R удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (R_t + DR_x) &= AR + \varepsilon RF + \varepsilon^3 RBR_{xx} + r, |x| < \infty, t > 0, \\ R(x,0) &= 0, r = O(\varepsilon^N). \end{aligned} \quad (21)$$

Заключение.

1. Главный член АР (4)

$$U(x,t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta,t) + \Pi_i(\xi,\tau)) + R_N$$

при фиксированном $t > 0$ имеет вид

$U(x,t) = \varphi_0(\zeta,t)h_0 + O(\varepsilon)$, где $\varphi_0(\zeta,t)$ есть решение уравнения $\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{eff}(\varphi_0))'_\zeta + (B_{eff}(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta})'_\zeta = 0$ (обобщенного уравнения Бюргерса – Кортевега – де Фриза). При квадратичной функции $F(u)$ и постоянной матрице $B(u)$ это уравнение становится уравнением Кортевега – де Фриза:

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + 2k\varphi_0\varphi_{0,\zeta} + B\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0.$$

Известно, что это уравнение может иметь решение в виде бегущей волны

$$\varphi_0(\zeta,t) = v(\zeta - ct) = v\left(\frac{x - Vt}{\varepsilon} - ct\right) = v\left(\frac{x - (V + c\varepsilon)t}{\varepsilon}\right).$$

Это, в свою очередь, говорит о том, что в многофазной среде «эффективная» скорость распространения уединенных волн может быть равной

$$V + c\varepsilon = \frac{(Dh_0, h_{*0})}{(h_0, h_{*0})} + c\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях // М.: Изд-во МГУ, 1978.
2. Нестеров А.В., Шулико О.В. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае // ЖВМиМФ, 2007. Т. 47. №3. С. 438–444.
3. Нестеров А.В., Шулико О.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // ЖВМиМФ, 2010. Т. 50. №2. С. 268–275.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Крыганов П. В., Вольпин С. Г., Афанаскин И. В., Штейнберг Ю. М., Ялов П. В.
г. Москва

Рассмотрены вопросы интерпретации гидродинамических исследований горизонтальных скважин. Приведены математические модели для интерпретации исследований и примеры их применения. Проанализированы основные особенности при определении фильтрационных свойств пласта и параметров скважины, а также рассмотрены проблемы обработки материалов гидродинамических исследований горизонтальных скважин.

Ключевые слова: гидродинамические исследования скважин, горизонтальные скважины.

MATHEMATICAL MODELS FEATURES FOR WELLTESTS INTERPRETATION OF HORIZONTAL WELLS

Kryganov P. V., Volpin S. G., Afanaskin I. V., Shteinberg Yu. M., Yalov P. V.
Moscow

The article describes issues of welltests interpretation of horizontal wells. Mathematical models for welltests interpretation and examples of their application are given. The main features in determining the filtration properties of the reservoir and well characteristics are analyzed and the problems of welltests interpretation of horizontal wells are considered.

Keywords: welltests, horizontal wells.

Введение

Развитие методических и технологических аспектов гидродинамических исследований вертикальных скважин за последние несколько десятилетий показало их высокий уровень информационного обеспечения проектирования разработки нефтяных месторождений и контроля за её осуществлением. Но, вместе с тем, по мере развития, увеличивалось и количество проблем, ограничений, трудностей, с которыми приходилось сталкиваться при решении усложнившихся со временем задач. Казалось, что потенциал развития гидродинамических исследований вертикальных скважин неисчерпаем.

Эксплуатация горизонтальных скважин относительно недавно стала широко распространённым явлением и анализ материалов их гидродинамических исследований показал, что информативность таких работ, а, вместе с тем, и сложность получения информации значительно выше, чем в вертикальных скважинах.

Необходимость использования горизонтальных скважин и их эффективность была неоднократно подтверждена при разработке месторождений с трудноизвлекаемыми запасами: при разработке залежей с тонкой нефтяной оторочкой, разработке низкопроницаемых коллекторов и т.д. Понятно, что со временем в условиях отечественных месторождений широта использования горизонтальных скважин будет только расти. А значит, будет расти и актуальность развития математических моделей для интерпретации гидродинамических исследований горизонтальных скважин.

Отметим основные возможности получения информации при проведении гидродинамических исследований в горизонтальных скважинах:

1. Определение традиционных фильтрационных параметров, в том числе проницаемости, скин-фактора и пластового давления;
2. Определение интегрального скин-фактора, учитывающего и геометрию скважины и степень загрязненности призабойной зоны и анизотропию проницаемости;
3. Определение анизотропии пласта;
4. Оценка эффективной (реально работающей) длины горизонтального ствола.

При этом основные сложности при проведении исследований и интерпретации их материалов заключаются в следующем:

1. Необходимость проведения длительных исследований, особенно в случае длинных горизонтальных стволов (в первую очередь - проблемы вызывает необходимость остановки скважин на длительное время при исследовании методом восстановления давления, что ведет к потере в добыче нефти).
2. Большое количество режимов течения, с которыми приходится сталкиваться при исследованиях, и неоднозначность идентификации каждого режима.
3. Необходимость учета сложного влияния соседних скважин.
4. Проблемы при учете влияния ствола скважины.
5. Сложность математических моделей, описывающих разные режимы течения.

1. Теоретические аспекты гидродинамических исследований горизонтальных скважин при нестационарной фильтрации

Наиболее информативным методом гидродинамических исследований горизонтальной скважины являются исследования с регистрацией кривой восстановления давления (КВД).

При интерпретации КВД строится диагностический график в билогарифмических координатах, по которому проводится диагностика с целью выделения режимов фильтрации в пласте. Диагностический график представляет собой семейство двух кривых, построенных по двойной логарифмической шкале: кривой восстановления давления, построенной в координатах изменение давления ΔP от времени после остановки скважины t и производной, взятой от ΔP по T (T – время суперпозиции, рассчитанное с учетом истории работы скважины до остановки) [1-3]. На диагностическом графике можно увидеть различные участки наклона, соответствующие разным режимам течения флюида.

Для горизонтальной скважины в начальный период времени, при отсутствии влияния ствола скважины, производная должна выйти на горизонтальный участок – ранний радиальный режим течения к стволу скважины в вертикальной плоскости. Далее производная должна начать расти до достижения наклона 0.5, характеризующего плоскопараллельное (линейное) течение по пласту к горизонтальному стволу скважины. После чего производная должна выйти на второй горизонтальный участок – поздний радиальный режим течения в горизонтальной плоскости к скважине как к точке.

В общем виде решение уравнения пьезопроводности для случая притока жидкости к горизонтальной скважине записывается в изображениях. Обратный переход от изображения к давлению производится с помощью численного интегрирования. Такое решение затруднительно для визуального анализа физических особенностей фильтрации, поэтому далее будет рассмотрена серия приближенных решений для различных режимов притока к горизонтальной скважине.

Рассмотрим приближенные уравнения нестационарного притока слабосжимаемой жидкости к горизонтальной скважине, вскрывающей бесконечный в горизонтальной плоскости анизотропный упругий пласт, для каждого режима течения после остановки скважины.

Уравнение для раннего радиального течения жидкости к горизонтальной скважине выглядит следующим образом [4]:

$$p_w = m_1 x_1 + p_1, \quad (1)$$

где

$$m_1 = -\frac{21,5qB\mu}{L_e\sqrt{k_r k_z}}, x_1 = \lg\left(\frac{t_1 + \Delta t}{\Delta t}\right), \quad (2)$$

где p_w - забойное давление (бар), q - дебит скважины перед остановкой ($\text{м}^3/\text{сут}$), Δt - время после остановки скважины (час), t_1 - длительность режима работы скважины с дебитом q , m_1 и p_1 - постоянные коэффициенты, k_r и k_z - горизонтальная и вертикальная проницаемость (мД), L_e - эффективная длина горизонтального ствола скважины (м), μ - вязкость (мПа·с), B - объемный коэффициент ($\text{м}^3/\text{м}^3$).

По графику p_w от x_1 определяются константы m_1 и p_1 . При известной длине L_e находят коэффициент анизотропии проницаемости $\alpha_z = k_z/k_r$ и затем скин-фактор на стенке ствола скважины (механический скин-фактор) s_m :

$$s_m = 1,1513 \left[\frac{p_w(\Delta t = 0) - p_{1hr}}{m_1} - \lg\left(\frac{\sqrt{k_r k_z}}{\phi \mu c_t r_w^2}\right) + 3,0923 \right], \quad (3)$$

где

$$p_{1hr} = m_1 \lg(t_1 + 1) + p_1, \quad (4)$$

ϕ - пористость (д. ед.), c_t - полная сжимаемость системы пласт-флюид (1/бар), r_w - радиус скважины (м).

Выражение для последующего линейного течения жидкости к горизонтальной скважине имеет следующий вид:

$$p_w = p_2 - m_2 x_2, \quad (5)$$

где

$$x_2 = \sqrt{t_1 + \Delta t} - \sqrt{\Delta t}, m_2 = 1,246 \frac{qB}{hL_e} \sqrt{\frac{\mu}{k_r \phi c_t}}, \quad (6)$$

где h - толщина пласта (м).

По графику p_w от x_2 определяют константу m_2 , по которой появляется возможность уточнить работающую длину горизонтального ствола скважины L_e , если нет данных о ней по другим исследованиям.

Выражение для позднего радиального течения жидкости к горизонтальной скважине выглядит следующим образом:

$$p_w = m_3 x_3 + p_3, \quad (7)$$

где

$$m_3 = -\frac{21,5qB\mu}{hk_r}, x_3 = \lg\left(\frac{t_1 + \Delta t}{\Delta t}\right). \quad (8)$$

По графику p_w в зависимости от x_3 определяются константы m_3 и p_3 , затем появляется возможность найти проницаемость пласта в горизонтальном направлении k_r , общий (интегральный) скин-фактор скважины s и пластовое давление p_i :

$$s = 1,1513 \left[\frac{p_w(\Delta t = 0) - p_{1hr}}{m_3} - \lg\left(\frac{k_r}{\phi \mu c_t L_e^2}\right) + 3,0923 \right], \quad (9)$$

$$p_i = p_3, \quad (10)$$

где

$$p'_{lhr} = m_3 \lg(t_1 + 1) + p_3. \quad (11)$$

При этом

$$s = s_m + s_h, \quad (12)$$

где s_h - скин-фактор, по которому можно определить различие между поздним радиальным режимом течения к горизонтальной скважине и радиальным режимом течения к вертикальной скважине. Оценку можно осуществить из выражения (12) при известном s_m по раннему радиальному режиму фильтрации, либо рассчитать по формуле [5]:

$$s_h \approx 1 - \frac{h}{L_e} \sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \ln \left(\frac{4\pi^2 r_w z_w}{h^2} \sqrt{\frac{k_z}{k_r}} \right) + \ln \left(\frac{2,7 r_w}{L_e} \right). \quad (13)$$

3. Особенности интерпретации КВД, зарегистрированных в горизонтальных скважинах

Главной проблемой при проведении гидродинамических исследований в горизонтальных скважинах методом восстановления давления является необходимость закрытия скважины на очень долгое время. Чем выше длина горизонтального ствола скважины и чем ниже проницаемость, тем дольше необходимо регистрировать КВД для того, чтобы на диагностическом графике Бурде появился поздний радиальный режим течения жидкости, по которому можно определить основные фильтрационные свойства пласта, а именно проницаемость в горизонтальном направлении, интегральный скин-фактор скважины и пластовое давление. Это объясняется тем, что поздний радиальный режим развивается в том случае, когда фильтрация к горизонтальному стволу осуществляется как к точке. В настоящее время недропользователи достаточно широко эксплуатируют горизонтальные скважины с длиной горизонтального ствола в несколько сотен метров. При таких параметрах достичь участка позднего радиального течения крайне затруднительно, но на рис. 1 представлен именно такой случай. Обработка материалов гидродинамических исследований была проведена в программе Saphir компании Kappa Engineering [6].

Основная особенность этой КВД, зарегистрированной на месторождении Т в том, что ее регистрация продолжалась более 2,5 месяцев. Такая продолжительность позволяет выделить и оценить участки разных режимов течения на кривой.

Участок ранней радиальной фильтрации длится примерно – с 1 часа от начала КВД до 7 часов (автором работы [7] отмечено, что этот участок обычно продолжается в течение достаточно малого времени); участок линейной фильтрации - от 40 часов до 100 часов; участок поздней радиальной фильтрации – от 200 часов до 1800 часов.

Проанализируем информативность каждого участка в отдельности:

- По участку ранней радиальной фильтрации был определен механический скин-фактор – 0 безр., коэффициент анизотропии – 0.02 безр.;
- По участку линейной фильтрации оценена длина горизонтального ствола 461 м (при общей длине около 631 м);
- По участку поздней радиальной фильтрации определены проницаемость пласта в радиальном направлении (345 мД), общий (интегральный) скин-фактор скважины (-6,5) и пластовое давление (167 кгс/см²).

По этому же месторождению Т были выявлены следующие трудности интерпретации КВД, зарегистрированных в других скважинах:

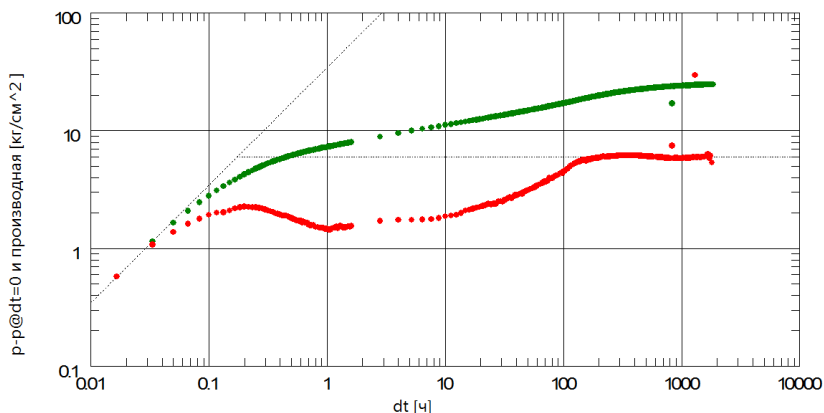


Рис. 1. Диагностический график Бурде по длительной КВД. Месторождение Т. Скв. 153 [6]

- Традиционное отсутствие участка ранней радиальной фильтрации из-за влияния ствола скважины и, соответственно, трудности в определении механического скин-фактора и коэффициента анизотропии.

- Короткие КВД без выхода на поздний радиальный участок. Поскольку в большинстве случаев отсутствует информация об эффективной длине горизонтального ствола по данным промыслово-геофизических исследований, короткие КВД невозможно однозначно интерпретировать.

- В случае коротких КВД компьютерная программа, использующая нелинейную регрессию для решения обратной задачи, не может дать однозначного достоверного решения, предлагая бесчисленное множество зачастую абсурдных вариантов. С целью освобождения от неопределенности часто сокращается количество искомых неизвестных величин, закрепив значение «эффективной длины горизонтального участка скважины», приняв его равным фактической длине горизонтального ствола по данным бурения. Возможные погрешности в оценке фильтрационных характеристик зависят от латеральной неоднородности пласта.

- Отсутствие линейного притока по причине высокой анизотропии пласта и, как следствие, невозможность оценки длины горизонтального ствола [6].

- Неоднозначность объяснения загибов конечного участка кривой производной по какой-либо из следующих причин: интерференция скважин, наличие границ в окрестности скважины или технические особенности манометра.

Заключение

Рассмотренные в настоящей работе особенности математических моделей для интерпретации гидродинамических исследований горизонтальных скважин позволяют оценить информативность подобных исследований. На ряде примеров интерпретации исследований в горизонтальных скважинах были проанализированы возможности получения различных параметров, а также рассмотрены основные сложности их определения.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 27, проект № 0065-2019-0111.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourdet D. et al. A new set of type curves simplifies well test analysis // World Oil, 1983. May. PP. 95–106.
2. Bourdet D. Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2002. P. 425.
3. Bourdet D. Интерпретация результатов исследований скважин // Материалы лекций. - Petroleum Engineering and Related Management Training Gubkin Academy. Moscow, 1994. 109 с.
4. Афанаскин И.В., Вольпин С.Г., Штейнберг Ю.М., Ломакина О.В. Гидродинамические исследования горизонтальных скважин методом двух режимов // Вестник кибернетики, 2017. № 2. С. 108–113.
5. Евченко В.С., Захарченко Н.П., Каган Я.М. и др. Разработка нефтяных месторождений наклонно-направленными скважинами. М.: Недра, 1986. 278 с.
6. Olivier Houze, Didier Viturat, Ole S. Fjaere. Dynamic Data Analysis. Kappa Engineering, 2017. V 5.12. 743 p.
7. Иктисанов В.А. Гидродинамические исследования и моделирование многоствольных горизонтальных скважин. Казань: «Издательство Плутон», 2007. 124 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРЧИСЕЛ

Деев Г. Е., Ермаков С. В.

Обнинский институт атомной энергетики

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

georgdeo@mail.ru, ermakov@iate.obninsk.ru

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с понятиями анализа [1–3]. Показано, как основные классические понятия математического анализа, такие как производная, интеграл и их обобщения, могут быть определены на гиперсетке с использованием гиперчисел без привлечения понятия предела [4, 5]. Понятие гиперчисла возникает в результате вычислений, проводимых абстрактными вычислительными устройствами.

1. Гиперчисла и гиперчислоиды.

В процессе вычислений, проводимых абстрактными вычислительными устройствами (АВУ), становится ясным, что необходимо расширить атрибутику, связанную с числом. Так, выясняется, что АВУ приспособлены к вычислительной работе не только с конечнозначными числовыми объектами, но и с бесконечнозначными, причём, с последними даже в большей мере. Кроме того выясняется, что надо явно отличать число как идейный объект от его многочисленных знаковых представлений. АВУ (как и все компьютеры) работают не с самими числами, а с их представителями, в роли которых выступают разные варианты записи числа. В своей вычислительной работе АВУ уводят нас довольно далеко от обычных представлений и понятий. Такими этапными понятиями являются понятия гиперчислоида и гиперчисла, причём, дело на этом не заканчивается, а уходит в перспективе далеко вперёд. Гиперчисло – это достаточно

продвинутое расширение понятия числа, а гиперчислоид способ его представления, доступный нам для прочтения и понимания. Для *записи числоидов* и *интерпретации гиперчисел* используются, соответственно, *обобщённые разрядные сетки* и *гипероси*.

Модель обобщённой разрядной сетки приведена на рис.1. Она представляет со-

$$Gr: \underbrace{\dots \overbrace{2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2}^{Gr^2} \dots}_{\text{Вес: } 10^{2-\infty}} \underbrace{\dots \overbrace{2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2}^{Gr^1} \dots}_{\text{Вес: } 10^{1-\infty}} \underbrace{\dots \overbrace{2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2}^{Gr^0} \dots}_{\text{Вес: } 10^0} \underbrace{\dots \overbrace{2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2}^{Gr^{-1}} \dots}_{\text{Вес: } 10^{-1-\infty}} \underbrace{\dots \overbrace{2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2}^{Gr^{-2}} \dots}_{\text{Вес: } 10^{-2-\infty}} \dots,$$

Рис. 1. Модель обобщенной разрядной сетки (гиперсетки)

бой простирающуюся в обе стороны до бесконечности последовательность однотипных частных разрядных сеток, имеющих в кратком условном изображении вид, представленный на рис.2.

$$\underbrace{\overbrace{0 \ 1 \ 8 \ 6 \ 0}^{Gr^{p-\infty}}}_{\text{Вес: } 10^{p-\infty}}$$

Рис. 2. Пример частной разрядной сетки, входящей в гиперсетку

Вертикальные чёрточки слева и справа – это «границы» разрядной сетки, находящиеся на бесконечности. Горизонтальными чёрточками обозначены места разрядных сеток, на которые ставятся цифры системы счисления, в которой ведётся вычисление. Например, приведенной на Рис.2 комбинацией цифр представлено десятичное число 18,6. Место с номером i , ($i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) на самой сетке имеет вес 10^i , но на гиперсетке оно имеет вес $10^{i+p-\infty}$. Таким образом, вес частной разрядной сетки на гиперсетке равен $10^{p-\infty}$.

Из последовательности частных разрядных сеток выделяется сетка с весом $10^{0-\infty}$ (вместо $10^{0-\infty}$ пишем 10^0). Это «наша» разрядная сетка, на ней мы изображаем числа, встречающиеся в нашей практике. На других частных разрядных сетках находятся числа, нам не доступные, числа из «других миров», бесконечно большие и бесконечно малые. Число p , определяющее вес частной разрядной сетки, может быть любым комплексным числом. В случае, если p принимает действительные значения, гиперсетка представляет собой упорядоченное множество частных сеток. Абстрактные вычислительные устройства ведут свои вычисления, совершая переходы от одних частных разрядных сеток к другим.

Гиперчислоиды (по определению) получаются путём произвольной простановки на *все* места разрядной гиперсетки цифр системы счисления.

Существенно отметить, что цифры должны быть проставлены на *все* места гиперсетки.

Служебная роль гиперчислоидов состоит в том, что они используются для представления гиперчисел. Гиперчисла являются ближайшими идейными наследниками понятия числа, порождаемыми абстрактными вычислительными устройствами.

Гиперчисла, помимо гиперчислоидного представления, находят себе также наглядное, геометрическое представление на числовой гипероси, модель которой представлена на рис.3. Она состоит из бесконечного семейства геометрически подобных друг другу частных числовых осей, и не отличающихся от обычных числовых осей. На этих осях точками изображаются числа. Каждая ось имеет свой весовой коэффициент вида

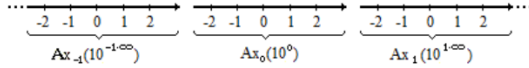


Рис. 3. Модель числовой гипероси

$10^{p\cdot\infty}$, где p – любое комплексное число. На Рис.3 приведён случай, когда числа p принимают целые значения. В этом случае частные числовые оси упорядочены отношением «больше»: $\bar{x} \cdot 10^{k\cdot\infty} < \bar{x} \cdot 10^{l\cdot\infty}$, если $k < l$. Гиперчисло изображается набором точек на всех осях, по одной точке на каждую ось. Изображённая на Рис.3 гиперось Ax может быть записана в виде: $Ax = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} Ax_p$. Понятно, что это представление может быть

обобщено: $Ax = \bigcup_{k \in C} Ax_k$, где C – любое континуальное множество, например, множество всех действительных чисел. Такая гиперось называется *континуальной числовой гиперосью*. Все эти гипероси являются неархимедовыми прямыми.

Числоид, записанный на конкретной разрядной сетке с каким-либо весом, дает, вообще говоря, при интерпретации этого числоида на гипероси, «выбросы» в соседние числовые оси. Например, числоид $\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}_{(4)}$, записанный на разрядной сетке Gr^0 , представляет следующее гиперчисло:

$$\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}_{Gr^0} = \dots + (0) |_{Ax_{-3}} + (0) |_{Ax_{-2}} + \left(-\frac{2}{3}\right) |_{Ax_{-1}} + \left(-\frac{1}{3}\right) |_{Ax_0} + 1 |_{Ax_1} + (0) |_{Ax_2} + (0) |_{Ax_3} + \dots$$

или, отбрасывая числовые оси, на которых стоят нули

$$\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}_{Gr^0} = \left(-\frac{2}{3}\right) |_{Ax_{-1}} + \left(-\frac{1}{3}\right) |_{Ax_0} + 1 |_{Ax_1}.$$

Первое и третье слагаемые справа – это выбросы в соседние числовые оси. Изображение этого числоида на *гиперсетке* приведено на рис.4, а изображаемое им гиперчисло на *гипероси* – на рис.5.

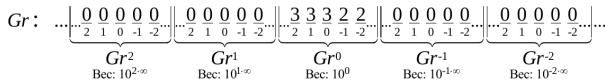


Рис. 4. Гиперчислоид $\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}$ на гиперсетке

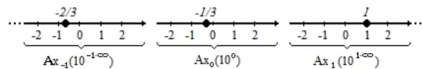


Рис. 5. Гиперчисло на числовой гипероси, представленное числоидом $\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}$.

На всех остальных осях стоят нули. Таким образом, полная запись этого гиперчисла на гипероси имеет вид:

$$\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}_{Gr^0} = \dots |0|0|0| - \frac{2}{3} | - \frac{1}{3} |1|0|0|\dots |_{Ax}$$

или, более компактно,

$$\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2} \big|_{Gr^0} = \overset{\leftarrow}{0} - \frac{2}{3} \big| - \frac{1}{3} \big| 1 \overset{\leftarrow}{0} \big|_{Ax}$$

Равенство, как всегда, представительское, т.е. числоид слева от знака равенства *представляет* гиперчисло справа. Видна полная аналогия с привычной записью числа. Роль номеров разрядов здесь играют номера весов сеток. Вертикальными линиями отделены друг от друга числовые оси с соседними весами. «Наша» числовая ось Ax_0 , на которой мы представляем доступные нам числа, с которыми мы оперируем в быту, в нашей реальной жизни, отмечена ноликом снизу. На ней стоит число $(-1/3)$. Именно оно нам доступно, именно с ним мы оперируем, ведём вычисления. В «нашем» мире числоид $\overset{\leftarrow}{3} \overset{\leftarrow}{2}$ мы воспринимаем как число $(-1/3)$. Справа от неё стоит единица из недоступного нам мира бесконечно больших величин, а слева стоит число $(-2/3)$ из также недоступного нам мира бесконечно малых величин. Числовые оси слева и справа от оси Ax_0 нет необходимости отмечать индексами, соответствующими их весам, они легко отсчитываются. Числовые оси с большими весами располагаются и растут вправо, а числовые оси с меньшими весами располагаются и уменьшаются влево. Угловые скобки указывают направление роста весов сеток. Как видно, полное представление гиперчисла является бесконечно местным. Символом $\overset{\leftarrow}{0}$ обозначены нули на всех частных осях с номерами меньшими (-1) и большими $(+1)$.

Зачем это нужно? Зачем вводятся обобщённая разрядная сетка и гиперось – новые математические объекты? Математика и без того сложна. Ответ: 1) уже было сказано, что эти объекты подсказываются нам (индуцируются) вычислениями с АВУ при интерпретации результатов их вычислений. 2) Кроме того, немалую роль здесь играет мировоззренческая сторона дела: мы обнаруживаем, что *бесконечность может быть структурирована* не только по Кантору, но и *приведённым выше способом, который максимально приближен к процедуре вычислений* (канторовы кардинальные и ординальные числа не имеют цифрового представления и потому не воспринимаются вычислительными устройствами). Мы теперь, получив в результате вычислений бесконечно большие величины или бесконечно малые, не ограничиваемся констатацией того факта, что, допустим, ряд расходится или не отбрасываем бесконечно малую величину по причине её бесконечной малости, а точно на обобщённой разрядной сетке выписываем числоиды, равные этим бесконечно большим и бесконечно малым, а также точно даём им геометрическую интерпретацию на числовой гипероси.

Числовые гиперсетки и гипероси дают нам шкалы бесконечностей, позволяющие ориентироваться в результатах вычислений, приводящих к бесконечностям. Бесконечность оказывается структурированной и вычислительно согласованной. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} 10^k = \frac{10^\infty - 1}{9} = \frac{1}{9} \cdot 10^\infty - \frac{1}{9} = \overset{\leftarrow}{0} \overset{\leftarrow}{1} \big|_{Gr^1} + \overset{\leftarrow}{9} \overset{\leftarrow}{8} \big|_{Gr^0} = \left(-\frac{1}{9}\right) \big|_{Ax_0} + \left(\frac{1}{9}\right) \big|_{Ax_1} \quad (1)$$

имеет точное представление как на обобщённой разрядной сетке так и на числовой гипероси. (Пояснение. Числоидное представление фигурирующих величин на обобщённой разрядной сетке таково:

$$\frac{1}{9} = \overset{\leftarrow}{0} \overset{\leftarrow}{1} \big|_{Gr^1} = \dots 000 \overset{\leftarrow}{0} 1111 \dots \big|_{Gr^1}, -\frac{1}{9} = \overset{\leftarrow}{9} \overset{\leftarrow}{8} \big|_{Gr^0} = \dots 999 \overset{\leftarrow}{9} 8888 \dots \big|_{Gr^0}$$

Как видно, на «нашей» числовой оси Ax_0 стоит число $\left(-\frac{1}{9}\right)$ и потому, если бы мы, следовали Эйлеру, то должны были бы сказать, что наш ряд $\sum_{k=0}^{k=\infty} 10^k = \left(-\frac{1}{9}\right)_{Ax_0}$. Это согласуется с тем, что в нашей интерпретации мы читаем и оперируем только с тем, что находится в «нашем» мире, т.е. на оси Ax_0 . Таково возможное объяснение «странных» эйлеровских равенств. Правильный же ответ представлен равенством (1).

Наконец, 3) желательность введения обобщённой разрядной сетки и гипероси состоит в том, что они позволяют трактовать бесконечно малые и бесконечно большие величины в статическом виде. Такой подход к трактовке этих величин уже ранее встречался (в Эйлеровское время), но в последующем не нашёл поддержки. Введённые *обобщённая разрядная сетка и гиперось* позволяют реанимировать эту точку зрения и использовать её при определении основных понятий анализа, производной и интеграла, без использования понятия предела.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Выше уже были употреблены термины «бесконечно малые» и «бесконечно большие». Далее эти термины уточняются. Эти термины общеизвестны, но вычисления, проводимые с помощью АВУ, подталкивают нас к верификации этих понятий, приспособив их для работы с АВУ. При этом приходится констатировать, что неожиданно оживает представления математиков предшествующей эпохи, эпохи, близкой к Эйлеру.

Определение (бесконечно малой величины). Бесконечно малой величиной называется гиперчисло вида (2):

$$\bar{\nu} = \dots + \bar{\nu}^{-2}|_{Ax_{-2}} + \bar{\nu}^{-1}|_{Ax_{-1}} + \overset{\leftarrow}{0}|_{Ax_0} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \bar{\nu}^{-i}|_{Ax_{-i}} + \overset{\leftarrow}{0}|_{Ax_0} \quad (2)$$

где $\bar{\nu}^i$ — произвольное число на оси $Ax_i(10^{i \cdot \infty})$, $(i = -1, -2, -3, \dots)$.

Как видно, для бесконечно малой существенно, чтобы на оси Ax_0 стоял ноль. На всех остальных осях с положительными весами $Ax_i(10^{i \cdot \infty})$, $(i = 1, 2, 3, \dots)$, стоят нули (не написаны, подразумеваются).

Точка зрения Эйлера на бесконечно малые и бесконечно большие изложена в его учебниках, в частности, в [6]. Введённая нами величина $\bar{\nu}$ (2) обладает всеми свойствами бесконечно малой Эйлера.

Протицируем Эйлера ([6]):

«...бесконечно малые, которые рассматриваются в дифференциальном исчислении, не отличаются от абсолютного нуля», (стр.41).

«...(дифференциалы) всегда нужно считать равными нулю; таким должно быть истинное понятие о бесконечно малом», (стр.42).

«...количество бесконечно малое есть не что иное, как количество исчезающее, и потому оно точно равно нулю», (стр.91).

«...если кто спросит, что такое бесконечно малое количество, то мы ответим, что оно точно равно нулю», (стр.91).

Особенно чётко и понятно Эйлер выразил свою точку зрения на бесконечно малую величину в последней цитате. Это его представление вполне согласуется с записью (2), если учесть, что мы читаем только то, что находится на «нашей» оси Ax_0 . Только ту информацию, которая содержится на этой оси, мы воспринимаем, читаем, ведём с ней реальные вычисления. На ней, как и говорит Эйлер, находится ноль.

Но бесконечно малые, по Эйлеру, несмотря на то, что они «точно равны нулю» — это различные числовые индивидуальности. Они могут быть сравниваемы друг с другом. Сравнение происходит по двум признакам: по признаку «арифметического отношения»

и по признаку «геометрического отношения». Пусть α и β – две бесконечно малые величины.

Арифметическим отношением называется разность $\Delta = \alpha - \beta$.

Геометрическим отношением называется частное $\delta = \alpha : \beta$.

Поскольку все бесконечно малые «точно равны нулю», то арифметическое отношение $\Delta = 0$. Однако, «...два нуля (т.е. две бесконечно малые величины) могут иметь друг к другу любое геометрическое отношение...», ([6]стр.91), т.е. геометрическое отношение δ может быть любым. Или: «...если мы имеем различные бесконечно малые dx и dy , то, хотя каждое из них и равно нулю, однако их отношение нулю не равно», ([6] стр.92).

Сформулируем свойства бесконечно малых по Эйлеру величин в современных обозначениях.

Введём обозначения:

$\omega(\Omega) \geq 1 \{ \alpha \mid \alpha - \text{бесконечно малая (большая) величина} \}$,

где значок ≥ 1 читается: «равно по обозначению» или, просто, «обозначает».

Таким образом, ω – это множество бесконечно малых величин.

Тогда свойства бесконечно малых по Эйлеру величин оформляются следующим образом:

1. $\forall_{\alpha \in \omega} [\alpha \geq 0]$ (любая бесконечно малая величина неотрицательна),
2. $\forall_{\alpha \in \omega} [\alpha = 0]$ (любая бесконечно малая величина «точно равна нулю»),
3. $\forall_{\alpha \in \omega} \forall_{\beta \in \omega} [\alpha : \beta \in \mathbb{R}_+ \cup \omega \cup \Omega]$ («геометрическое отношение» бесконечно малых

может быть или *любым неотрицательным действительным числом* или *бесконечно малой величиной* или *бесконечно большой величиной*),

где $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных действительных чисел.

Но Эйлер отмечает существование и других толкований бесконечно малых величин. Он пишет: «... некоторые авторы ... сочли необходимым установить особую категорию бесконечно малых величин, которые якобы не полностью исчезают, но сохраняют некоторое количество, которое, однако, меньше, чем всякое могущее быть заданным», ([6]стр.40).

В наших обозначениях:

- 1*. $\forall_{\alpha \in \omega} [\alpha \geq 0]$ (любая бесконечно малая величина неотрицательна),
- 2*. $\exists_{\alpha \in \omega} [\alpha \neq 0]$ (существует бесконечно малая величина, отличная от нуля),
- 3*. $[\alpha \in \omega] \rightarrow \forall_{\substack{a \geq 0, a \neq 0}} [\alpha \leq a]$ (если α – бесконечно малая, то она меньше любого положительного числа).

Оказывается, совместить высказанные характеристики бесконечно малых можно, обратившись к понятию гиперчисла.

Действительно, равенство (1), определяющее бесконечно малую, можно записать в развёрнутом виде:

$$\bar{\nu} = \dots + \bar{\nu}^{-2} \cdot 10^{-2 \cdot \infty} + \bar{\nu}^{-1} \cdot 10^{-1 \cdot \infty} + \overset{0}{0} \cdot 10^0 \quad (3)$$

Какие свойства бесконечно малой вытекают из (3)?

1. Величину $\bar{\nu}$ естественно считать неотрицательной, т.к. все числа $\bar{\nu}^i$ ($i = \dots, -1, -2, \dots$) предполагаются неотрицательными на соответствующих числовых осях $Ax_i (10^{i \cdot \infty})$ (Эйлер за основу брал неотрицательные бесконечно малые).

2. Чему равна величина $\bar{\nu}$, если рассматривать её на числовой оси $Ax_0 (10^0)$, т.е. там, где находятся реально доступные нам числа? Естественно, нулю, поскольку на

ней записано число 0. Таким образом, мы воспринимаем величину $\bar{\nu}$ как нуль, что соответствует утверждению Эйлера: «...если кто спросит, что такое бесконечно малое количество, то мы ответим, что оно точно равно нулю. ([6]стр.91)». Напоминаем, что мы реально воспринимаем в нашей практической деятельности только то, что записано на оси $Ax_0(10^0)$. Всё происходящее на других числовых осях – это чужой мир, нам недоступный, хотя, возможно, и влияющий на нас, как и мы на него. Но до него не добраться ни на каком самолёте или каким либо другим способом. И это несмотря на то, что мыслью мы можем кое-что понимать об этих мирах, например, что на оси Ax_{-3} находится число $\bar{\nu}^{-3}$.

3. Вместе с тем в произвольности чисел $\bar{\alpha}^i$ проявляется множественность нулей (т.е. бесконечно малых, по Эйлеру) и их различная числовая индивидуальность. Действительно, если написать другую бесконечно малую величину:

$$\bar{\beta} = \overset{\leftarrow 0}{0} \cdot 10^0 + \bar{\beta}^{-1} \cdot 10^{-1 \cdot \infty} + \bar{\beta}^{-2} \cdot 10^{-2 \cdot \infty} \dots, \quad (4)$$

то из дроби

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{\overset{\leftarrow 0}{0} \cdot 10^0 + \bar{\alpha}^{-1} \cdot 10^{-1 \cdot \infty} + \bar{\alpha}^{-2} \cdot 10^{-2 \cdot \infty} \dots}{\overset{\leftarrow 0}{0} \cdot 10^0 + \bar{\beta}^{-1} \cdot 10^{-1 \cdot \infty} + \bar{\beta}^{-2} \cdot 10^{-2 \cdot \infty} \dots}$$

усматривается справедливость свойства 3 Эйлеровых бесконечно малых величин. При этом, правила оперирования с таким дробями описаны у Эйлера; нужно также помнить, что после выполнения деления в правой части, результат должен прочитываться на гипероси $Ax = \bigcup_i Ax_i(10^{i \cdot \infty})$.

Итак, величина $\bar{\nu}$ (2) (или, что всё равно, (3)) обладает всеми свойствами бесконечно малой величины в понимании Эйлера. *Величина $\bar{\nu}$ является моделью бесконечно малой Эйлера.* Эйлеровы бесконечно малые реализуются на гипероси Ax .

Что же касается свойств $1^* - 3^*$, которыми наделяли бесконечно малые величины «некоторые авторы», то величины типа (3) на гипероси также удовлетворяют всем этим свойствам. Таким образом, оказывается, что между свойствами $1 - 3$ и свойствами $1^* - 3^*$ нет противоречия. Поэтому понятно, что они мировоззренчески дополняют друг друга, являясь рассмотрением одного и того же объекта с различных точек зрения.

Аналогичный экскурс можно было бы совершить вместе с Эйлером [6] в область бесконечно больших величин. Но мы этого делать не будем, а лишь ограничимся этой ссылкой.

3. Производная от функции.

Производная от функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}$ определяется отношением:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + \bar{\nu}) - f(\bar{x})}{\bar{\nu}} \Big|_{Ax_0}, \quad (5)$$

где $\bar{\nu}$ – бесконечно малая, а правая часть прочитывается только на числовой оси Ax_0 , что отмечено стандартным в математическом анализе символом подстановки.

(Напоминаем, что (гипер)числа и числоиды отмечены черточкой сверху, а цифры – без черточки.)

Пример 1. $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$.

Имеем:

$$(\bar{x}^2)' = \frac{(\bar{x} + \bar{\nu})^2 - \bar{x}^2}{\bar{\nu}} \Big|_{Ax_0} = (2\bar{x} + \bar{\nu}) \Big|_{Ax_0} = 2\bar{x}. \quad (6)$$

Слагаемое $\bar{\nu}$ справа в (6) не находится на числовой оси Ax_0 и потому не читается. Внешне дело выглядит так, как будто величина $\bar{\nu}$ просто отбрасывается. Так поступали

в прошлом до определения понятия предела. Как видно, результаты вычисления производной по (6) и с помощью определения с использованием предела, как показывает вычислительная практика, всегда совпадают.

Приведём классическое обобщение понятия производной. Такое же обобщение приведено в работе Летникова А.В. [2]. Затем дадим его аналог на гиперсетке.

Производной порядка α в пределах от a до b от функции $f(\bar{x})$, где α – любое комплексное число, называется число, обозначаемое символом $\left. \frac{d^\alpha f(\bar{x})}{dx^\alpha} \right|_a^b$ или символом $D^\alpha f(\bar{x})|_a^b$, и получающееся в результате следующего предельного вычисления:

$$D^\alpha f(\bar{x})|_a^b = \left. \frac{d^\alpha f(\bar{x})}{dx^\alpha} \right|_a^b = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_\alpha^i \cdot f(b - i \cdot \frac{b-a}{N})}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^\alpha}, \quad (7)$$

где

$$C_\alpha^i = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \cdot \Gamma(\alpha-i+1)}, \quad \Gamma(\alpha+1) - \text{гамма-функция Эйлера.}$$

Обозначим через X_N множество точек:

$$X_N = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = b - i \cdot \frac{b-a}{N} \right\}, \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (8)$$

Чтобы иметь возможность вычислять выражение в (7), стоящее за знаком предела, значения функции $f(\bar{x})$ должны быть известны во всех точках множества X_N при каждом N , ($N = 1, 2, \dots$). Таким образом, полная информация о функции должна быть известна на множестве $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots$. Множество X – это множество всюду плотно на $[a, b]$, т.е. информация о функции должна быть достаточно богатой.

Приведём некоторые частные случаи, содержащиеся в (7).

Случай 1: $\alpha = 1$. Определение (7) даёт:

$$\begin{aligned} D^1 f(\bar{x})|_a^b &= \left. \frac{d^1 f(\bar{x})}{dx^1} \right|_a^b = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_1^i \cdot f(b - i \cdot \frac{b-a}{N})}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_1^0 \cdot f(b) - C_1^1 \cdot f(b - \frac{b-a}{N})}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(b) - f(b - \frac{b-a}{N})}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^1} = \begin{cases} f'_-(b), & \text{если } a < b \\ f'_+(b), & \text{если } a > b \end{cases}, \quad (9) \end{aligned}$$

где f'_- (f'_+) – производная слева (справа) от функции $f(\bar{x})$.

Случай 2: $\alpha = -1$. Определение (7) даёт:

$$\begin{aligned} D^{-1} [f(\bar{x})]|_a^b &= \left. \frac{d^{-1} f(\bar{x})}{dx^{-1}} \right|_a^b = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_{-1}^i \cdot f(b - i \cdot \frac{b-a}{N})}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^{-1}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=0}^{i=N} f(b - i \cdot \frac{b-a}{N}) = \int_a^b f(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

т.к. $C_{-1}^i = (-1)^i$.

Случай 3: $\alpha = \pi$, $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$. Определение (7) даёт:

$$\begin{aligned} D^\pi[\bar{x}^2] \Big|_a^b &= \frac{d^\pi \bar{x}^2}{dx^\pi} \Big|_a^b = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_{-1}^i \cdot (b - i \cdot \frac{b-a}{N})^2}{\left(\frac{b-a}{N}\right)^\pi} = \\ &= \Gamma(\pi) \cdot \sin \pi^2 \cdot \left[\frac{1}{\pi} \cdot b^2(b-a)^{-\pi} - \frac{2}{\pi-1} \cdot b(b-a)^{1-\pi} + \frac{1}{\pi-2} \cdot (b-a)^{2-\pi} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

В частности, при $[a = 0, b = \bar{x}]$ получаем:

$$\begin{aligned} D^\pi[\bar{x}^2] \Big|_0^{\bar{x}} &= \frac{d^\pi \bar{x}^2}{dx^\pi} \Big|_0^{\bar{x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_{-1}^i \cdot (\bar{x} - i \cdot \frac{\bar{x}}{N})^2}{\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)^\pi} = \\ &= \frac{2\Gamma(\pi) \cdot \sin \pi^2}{\pi \cdot (\pi-1) \cdot (\pi-2)} \cdot \bar{x}^{2-\pi} = \frac{2}{\Gamma(3-\pi)} \cdot \bar{x}^{2-\pi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно, из определения (7) получаются не только известные результаты вычислений, приводящие к производной и интегралу (случаи 1 и 2), но и другие результаты, например, производная порядка π (случай 3).

На гипероси и во множестве гиперчисел обобщение классического понятия производной (7) может быть переформулировано следующим образом:

$$D^\alpha[f(\bar{x})] \Big|_a^b = \frac{d^\alpha f(\bar{x})}{dx^\alpha} \Big|_a^b = \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_{-1}^i \cdot f(b - i \cdot \bar{\nu})}{\bar{\nu}^\alpha} \Big|_{Ax_0}. \quad (13)$$

Получение правильного результата с помощью (13) требует выполнения нескольких шагов.

- 1) Надо выполнить действия, указанные в записи дроби, предполагая, что N – натуральное число, связанное с $\bar{\nu}$ соотношением $N \cdot \bar{\nu} = b - a$.
- 2) В полученном после проведения всех преобразований выражении, считать N – бесконечно большой величиной, а $\bar{\nu}$ – бесконечно малой величиной, причём, обе величины N и $\bar{\nu}$ по-прежнему считать связанными соотношением $N \cdot \bar{\nu} = b - a$.
- 3) В полученном выражении всюду заменить произведение $N \cdot \bar{\nu}$ на $b - a$.
- 4) Прочитать полученное в (13) гиперчисло на основной числовой оси Ax_0 .

То, что окажется записанным на оси Ax_0 , и будет производной $D^\alpha[f(\bar{x})] \Big|_a^b$.

В примере 1 приведено одно из бесчисленных приложений этого определения.

В примере 2 приведено ещё одно, а также разъяснены некоторые моменты, связанные с формулой (13).

Пример 2. $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$, $\alpha = -1$. С учётом $C_{-1}^i = (-1)^i$ имеем:

$$\begin{aligned} D^{-1}[x^2] \Big|_a^b &= \frac{d^{-1} x^2}{dx^{-1}} \Big|_a^b = \frac{\sum_{i=0}^{i=N} (-1)^i \cdot C_{-1}^i \cdot (b - i \cdot \bar{\nu})^2}{\bar{\nu}^{-1}} \Big|_{Ax_0} = \\ &= \bar{\nu} \sum_{i=0}^{i=N} (b - i \cdot \bar{\nu})^2 \Big|_{Ax_0} = (\bar{\nu} b^2 \sum_{i=0}^{i=N} 1 - 2 \cdot b \cdot \bar{\nu}^2 \sum_{i=0}^{i=N} i + \bar{\nu}^3 \sum_{i=0}^{i=N} i^2) \Big|_{Ax_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{\nu}b^2(N+1) - 2 \cdot b \cdot \bar{\nu}^2 \frac{N^2+N}{2} + \bar{\nu}^3 \frac{2N^3+3N^2+N}{6}) |_{Ax_0} = \\
&= (b^2N\bar{\nu} + b^2\bar{\nu} - b(N\bar{\nu})^2 - b(N\bar{\nu})\bar{\nu} + \frac{1}{3}(N\bar{\nu})^3 + \frac{1}{2}(N\bar{\nu})^2\bar{\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{6}(N\bar{\nu})\bar{\nu}^2) |_{Ax_0} = \\
&= (b^2(b-a) + b^2\bar{\nu} - b(b-a)^2 - b(b-a)\bar{\nu} + \frac{1}{3}(b-a)^3 + \frac{1}{2}(b-a)^2\bar{\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{6}(b-a)\bar{\nu}^2) |_{Ax_0} = \\
&= b^2(b-a) - b(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 = \int_a^b x^2 dx.
\end{aligned}$$

Напомним, что $N \cdot \bar{\nu} = b - a$, а также, что бесконечно малые величины $b^2 \bar{\nu}$, $b(b-a)\bar{\nu}$, $(b-a)^2\bar{\nu}$, $(b-a)\bar{\nu}^2$ не находятся на оси Ax_0 и потому не читаются, «отбрасываются».

Альтернативный подход к определению производной изложен в [3].

Резюме:

Показано, как основные понятия математического анализа могут быть определены на числовой гипероси с помощью гиперчисел без использования понятия предела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дэвис М. Прикладной нестандартный анализ. М., Мир, 1980.
2. Летников А. Теория дифференцирования с произвольным указателем. М., Типография А.И. Мамонтова, 1868 г.
3. Robinson A., *Non-Standard Analysis*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1996.
4. Деев Г. Е. Вычисления с бесконечностями // Вестник кибернетики. 2017. № 1. С. 49–57.
5. Деев Г. Е. Абстрактные вычислительные устройства: Эйлеровы вычисления. М. : Энергоатомиздат, 2007. 332 с. ил.
6. Леонард Эйлер. Дифференциальное исчисление, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

ТРЕХМЕРНЫЙ МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Звягин А. В.^{1,2}, Лужин А. А.¹, Шамина А. А.^{1,2}

¹ Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва.
 zusasha@rambler.ru, luzhinsson@gmail.com, ebifsun1@mech.math.msu.su,
 anashamina90@mail.ru

² Институт машиноведения РАН имени А.А. Благонравова, Москва.

³ Федеральное государственное учреждение Федеральный Научный Центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва.

Исследуется проблема взаимного влияния трёхмерных диско-образных трещин, расположенных в параллельных плоскостях упругой среды. Среда находится под действием растягивающего напряжения в направлении перпендикулярном плоскостям трещин. Трещины моделируются математическими разрезами сплошной среды с возможностью сильного разрыва поля перемещений на берегах разреза. Решение строится численно с использованием метода разрывных смещений.

Ключевые слова: Трёхмерное пространство, упругая среда, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод граничных элементов, метод разрывных смещений.

DISPLACEMENT DISCONTINUITY METHOD IN 3-D PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS

Zvyaguin A. V.¹, Smirnov N. N.^{1,2}, Luzhin A. A.¹, Shamina A. A.¹

¹ *Moscow M. V. Lomonosov State University, Russia, Moscow, 119992, Leninskie Gory 1
zusasha@rambler.ru, luzhinsson@gmail.com, ebifsun1@mech.math.msu.su,
anashamina90@mail.ru*

² *Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis of the
Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 117218, 36-1 Nakhimovskiy pr.*

The present paper suggests a modification of boundary elements numerical method, which uses displacement discontinuity method in 3-D space. The advantage of the current method is in essential decrease of computational elements number in 3-D space because final elements are placed only on the surface of a fracture simulating the discontinuity of elastic medium. Thus the dimension of the problem is decreased. The new fundamental solutions were developed based on double layer potentials. The method proved to be effective for hydraulic fractures modeling and their interaction with natural faults in host rock formations.

Keywords: 3-D space, elastic medium, fracture, boundary element method, displacement discontinuity method.

Введение. Одной из актуальных проблем современной механики разрушения является задача исследования концентрации напряжений в окрестности трещин в трёхмерном пространстве. Об этом свидетельствует широкий круг современных прикладных задач [1-12], где основным элементом является или трещина, или концентратор напряжений в виде клиновидной границы.

Проблематика приложений весьма обширна: это прочность материалов с внутренней структурой; трещины в «резина – подобных» материалах; трещины на границе раздела сред (например, керамика – металл); трещины в условиях механического и теплового воздействия; задачи гидравлического разрыва.

Можно выделить две основные задачи, важные для инженерной практики. Первая – определение полей перемещений и напряжений, которые позволяют оценить области возможных пластических деформаций в теле. Вторая задача – найти коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), которые в линейной механике разрушения определяют возможность роста трещин. Эти проблемы обсуждаются в разных аспектах практически во всех публикациях. Хотелось бы отметить, что до сих пор основной массив статей связан с решением плоских задач. Трёхмерные постановки занимают значительно меньшую часть работ. Например, в приведенном перечне – это всего две работы [9], [12]. Это свидетельствует в пользу продолжения работ по созданию надёжных вычислительных методов решения трёхмерных задач механики трещин.

В механике разрушения трещины моделируются двумерными двухсторонними поверхностями, на которых перемещения терпят разрыв. Граничные условия необходимо выполнить не только на границе тела, но и на поверхностях (берегах) трещин. Наличие нескольких трещин разной пространственной ориентации приводит к существенному усложнению геометрии границы. В течение нескольких последних десятилетий доминирующими численными методами были методы конечных элементов. Метод конечных элементов для областей со сложной геометрией зависит от генерации сеток, адаптированных к границе. Генерация сетки в ситуациях с трещинами является не менее трудоёмкой задачей, чем решение самой граничной задачи, отнимает много времени и чревата подводными камнями. В последние два десятилетия активно развиваются методы, не требующие введения сетки во всём объёме тела. К таковым относятся методы граничных элементов и методы граничных интегральных уравнений. Преимуществом этих методов является возможность точного выполнения уравнений теории упругости. При этом граничные условия выполняются приближённо. Точность метода фактически определяется степенью выполнения условий на дискретном множестве точек границы. Используется много разновидностей методов, которые условно можно разбить на группы прямых и непрямых методов, методов потенциала и т.д. Каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками. Наиболее часто используются прямые методы, в основе которых заложено использование фундаментального решения задачи Кельвина для упругого пространства (или аналогичных задач для полупространства). Большой обзор работ по трёхмерным задачам и использованию прямых методов граничных элементов представлен в монографиях [13], [14].

В настоящее время существуют хорошо развитые эффективные непрямые методы граничных элементов для решения двумерных задач о трещинах. Одним из таких методов является метод разрывных смещений [15], [16]. В данной работе предлагается численный метод граничных элементов, реализующий метод разрывных смещений в трёхмерном пространстве. Основой является представление решения в виде ряда по некоторому набору линейно независимых аналитических решений уравнений теории упругости. Сам набор состоит из разрывных решений поля перемещений для о плоского, прямоугольного граничного элемента, ориентированного в пространстве.

Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии её решения. Для каждого элемента используется три независимых аналитических решений, в каждом из которых на элементе терпит разрыв одна из трёх компонент вектора перемещений. Решение конкретной граничной задачи ищется в виде ряда с неопределёнными коэффициентами по всему множеству элементов. Каждое элементарное решение вносит свой вклад в поле перемещений и в поле напряжений с весом, который и является соответствующим неопределённым коэффициентом ряда. Выполнение конкретных граничных условий приводит к системе линейных уравнений. После численного определения коэффициентов разложения мы имеем фактически аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам надо хранить только найденные коэффициенты разложения, позволяющие затем найти любые требуемые характеристики в любой точке области решения. Это существенно с точки зрения простоты практического использования полученного решения. Ещё одним важным преимуществом предлагаемого метода является возможность решения любых краевых задач (задача в напряжениях, задача в перемещениях, любая смешанная задача).

Коды программы реализованы авторами на языке C++. Написанная программа протестирована сравнением с известными аналитическими решениями [17-19]. Сравнение

показало хорошее качественное и количественное соответствие имеющимся результатам других авторов. Проведено численное исследование задачи взаимного влияния диско-образных плоских трещин. Рассматривались круглые и эллиптические плоские трещины разной взаимной ориентации и расположения в пространстве [20], [21]. В качестве меры взаимного влияния использовались величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Исследования показали, что в отличие от трещин плоской деформации, для трёхмерных трещин расстояние их существенного взаимного влияния, намного меньше. Этот факт говорит в пользу использования трёхмерной постановки задач механики прочности при наличии дефектов в виде трещин.

Функции разложения. Основой метода разложения решения по не ортогональным функциям является построение системы линейно независимых решений основной системы уравнений задачи. В статической теории упругости – это уравнения равновесия.

Введём следующие обозначения: (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты в некоторой системе координат с базисом e_1, e_2, e_3 ; $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора перемещений; λ, μ, E, ν – упругие модули (E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона); $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – матрицы компонент тензора деформаций и тензора напряжений; для упрощения записи воспользуемся следующим обозначением частной производной $\partial f / \partial x_k = f_{,k}$; повторяющийся индекс в любом выражении будет означать операцию свёртки; ∇ – оператор градиента функции; ∇^2 – оператор Лапласа.

Известно, что в статической теории упругости каждая из компонент поля перемещений, при отсутствии массовых сил, является бигармонической функцией [22], [23]. Рассмотрим для поля перемещений общего решения уравнений равновесия представление Треффца [23] в следующей форме

$$u_i = \varphi_i + x_3 \psi_{,i}, \quad \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Легко проверить, что каждая компонента перемещений (1) является бигармонической функцией $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Данное поле перемещений будет удовлетворять уравнениям упругости, если функции связаны соотношением

$$\psi_{,3} = -\Lambda \varphi_{k,k}, \quad 345 \quad \Lambda = (\lambda + \mu) / (\lambda + 3\mu) = 1 / (3 - 4\nu). \quad (2)$$

Рассмотрим три частных решения (2) уравнений теории упругости

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(1)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(1)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(2)} = \varphi^{(2)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(2)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(3)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(3)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(3)} = \varphi^{(3)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка перемещений (3) в условие (2) приводит к следующей связи введенных функций

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}. \quad (4)$$

Рассмотрим в упругом пространстве граничный элемент в виде плоского прямоугольника S : $x_3 = 0$, $|x_1| \leq h_1$, $|x_2| \leq h_2$. Определим, каждую функцию $\varphi^{(k)}$, как потенциал двойного слоя с плотностью $\mu^{(k)}$

$$\varphi^{(k)}(x) = \iint_S \mu^{(k)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{1}{|x - \xi|} \Big|_{\xi_3=0} dS_\xi. \quad (5)$$

Потенциал двойного слоя типа (5) обладает следующим свойством

$$\varphi = -\frac{\partial g}{\partial x_3}, \text{ где } g(x) = \iint_S \frac{\mu(\xi)}{|x - \xi|} \Big|_{\xi_3=0} dS_\xi - \text{потенциал простого слоя.} \quad (6)$$

Свойство (6) и равенства (4) позволяют выразить функции $\psi^{(k)}$ в конечной форме

$$\psi^{(1)} = \Lambda \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \psi^{(2)} = \Lambda \frac{\partial g^{(2)}}{\partial x_1}, \quad \psi^{(3)} = -\Lambda \varphi^{(3)}. \quad (7)$$

Введём выражение $\Lambda_1 = \lambda/(2\mu) = \nu/(1 - 2\nu)$. Используя (7), закон Гука и выражения для деформаций $\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ji} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$, можно найти компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, соответствующие каждому решению (3). Для перемещений получим:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2}, & u_2^{(1)} &= \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}, & u_3^{(1)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}; \\ u_1^{(2)} &= \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}, & u_2^{(2)} &= \varphi^{(2)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2}, & u_3^{(2)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}; \\ u_1^{(3)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1}, & u_2^{(3)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2}, & u_3^{(3)} &= \varphi^{(3)} - \Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично получаются выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1 - \Lambda) + 1] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^3}; & \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1 - \Lambda) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1 - \Lambda) - \Lambda] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{23}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1 - \Lambda) \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{22}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1 - \Lambda) + 1] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_2^3}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1 - \Lambda) - \Lambda] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{23}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{11}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1 - \Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{22}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1 - \Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(3)}}{2\mu} &= (\Lambda_1 + 1)(1 - \Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_3^2}; & \frac{\sigma_{12}^{(3)}}{2\mu} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1 - \Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{23}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1 - \Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2 \partial x_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Построенные решения для перемещений стремятся к нулю на бесконечности и являются линейно независимыми. В некоторых случаях потенциалы простого и двойного слоя можно вычислить аналитически. Например, в случае постоянной единичной плотности они соответственно равны:

$$g(x) = \left\{ [g_0(x, \xi_1, \xi_2)] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\}_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}, \quad \varphi(x) = \left\{ [\varphi_0(x, \xi_1, \xi_2)] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\}_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2} \quad (10)$$

В формулах (10) использовано символическое равенство

$$f(\eta)|_{\eta=b}^{\eta=a} = f(b) - f(a),$$

а функции $g_0(x, \xi_1, \xi_2)$, $\varphi_0(x, \xi_1, \xi_2)$ соответственно представлены в аналитической форме

$$\varphi_0(x, \xi_1, \xi_2) = -\frac{\partial g_0(x, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_3}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} g_0(x, \xi_1, \xi_2) &= \iint \frac{1}{|x-\xi|} \Big|_{\xi_3=0} d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= (x_1 - \xi_1) \log(r + x_2 - \xi_2) + (x_2 - \xi_2) \log(r + x_1 - \xi_1) - z \arctg \left(\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r x_3} \right), \\ r &= \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Аналитическое представление базисных решений в методе граничных элементов позволяет значительно упростить процедуру решения, поскольку отпадает необходимость вычисления сингулярных интегралов в системе граничных интегральных уравнений. Построенные решения (8), (9) используются в локальной системе координат для каждого граничного элемента. Для построения численной схемы обозначим поля перемещений и напряжений, соответствующие каждому из построенных решений, следующим образом:

$$U_i^{m(k)}, \sigma_{ij}^{m(k)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), (m = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

В выражениях (11) верхний индекс $k = 1, 2, 3$ означает номер решения, индекс m соответствует номеру граничного элемента. Каждое из решений имеет разрыв соответствующей компоненты вектора перемещения на данном граничном элементе.

Численный метод решения краевой задачи. Рассмотрим типичную задачу механики трещин для бесконечного пространства. В пространстве глобальной системы координат (X, Y, Z) с базисом (M_1, M_2, M_3) расположены несколько трещин, которые моделируются поверхностями разрыва перемещений (Рис.1). Будем, для определённости, ставить задачу в напряжениях. Для бесконечного пространства могут быть поставлены две типичные краевые задачи. В первой краевой задаче на бесконечности может быть задан ненулевой вектор напряжений σ_∞ , а на берегах трещин вектор напряжений равен нулю. Во второй краевой задаче вектор напряжений на бесконечности равен нулю, а на берегах трещин действует заданный вектор напряжений $\mathbf{P}_0$. В линейном случае первая задача может быть сведена к второй использованием суперпозиции решений. Действительно, можно представить поле перемещений $\mathbf{u}$ и тензор напряжений $\hat{\sigma}$ в виде суммы двух решений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \tilde{\mathbf{u}}$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\infty + \hat{\tilde{\sigma}}$, где $\mathbf{u}_\infty, \hat{\sigma}_\infty$ решение для пространства с заданными условиями на бесконечности при отсутствии трещин, а решение $\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\tilde{\sigma}}$ стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет на границах трещин условию $\hat{\tilde{\sigma}} = -\sigma_0$

Поскольку построение первого решения достаточно тривиально, остановимся подробно на построении решения с нулевыми условиями на бесконечности и с заданным вектором напряжений на поверхности трещин.

Это означает, что на берегу трещины задан вектор напряжений, как функция точек поверхности. Пусть $R^{(m)} = (X_m, Y_m, Z_m)$ — радиус вектор центра граничного элемента с номером m в глобальной системе координат, (e_1^m, e_2^m, e_3^m) — локальный базис данного элемента. Введём в рассмотрение ортогональные матрицы, $F^{(m)}, F^{(mn)}$ позволяющие

выразить векторы в глобальном базисе и переходить из одного локального базиса в другой

$$e^m = F^{(m)} M, e^n = F^{(mn)} e^m. \quad (12)$$

Для каждого граничного элемента с номером n в его локальном базисе e_i^n можно считать заданными три компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью e_3^n :

$$\sigma_{31} = b_1^n, \sigma_{32} = b_2^n, \sigma_{33} = b_3^n. \quad (13)$$

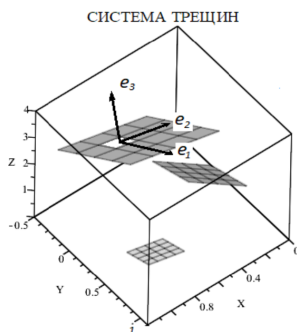


Рис. 1. Система трещин в глобальной системе координат (X, Y, Z) . На поверхности одной из трещин выделен граничный элемент со своей локальной системой координат (x_1, x_2, x_3) в базисе e_1, e_2, e_3 .

Рассмотрим следующее поле перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} U_i^m &= D_1^m U_i^{m(1)} + D_2^m U_i^{m(2)} + D_3^m U_i^{m(3)}; \\ \Sigma_{ij}^m &= D_1^m \sigma_{ij}^{m(1)} + D_2^m \sigma_{ij}^{m(2)} + D_3^m \sigma_{ij}^{m(3)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти поля являются решениями уравнений теории упругости в локальном базисе e_1^m, e_2^m, e_3^m . Найдем координаты центра элемента с номером n в данном базисе с использованием матрицы перехода (12)

$$R^{(mn)} = F^{(mn)} \cdot (R^{(n)} - R^{(m)}). \quad (15)$$

Подстановка координат (15) в формулы (9) позволяет найти компоненты тензора напряжений от поля (9) в точке, соответствующей центру элемента с номером n

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^m(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) &= D_1^m \sigma_{ij}^{m(1)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) + \\ &+ D_2^m \sigma_{ij}^{m(2)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) + D_3^m \sigma_{ij}^{m(3)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}). \end{aligned} \quad (16)$$

Полученные компоненты тензора (16) в базисе e_1^m, e_2^m, e_3^m позволяют найти их значения в базисе e_1^n, e_2^n, e_3^n

$$\sigma_{ij}^{mn} = D_1^m \sigma_{ij}^{mn(1)} + D_2^m \sigma_{ij}^{mn(2)} + D_3^m \sigma_{ij}^{mn(3)},$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{mn(1)} &= \sigma_{pq}^{m(1)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{is}^n \\ a_{qr}^m a_{jr}^n \end{pmatrix}, \\ \sigma_{ij}^{mn(2)} &= \sigma_{pq}^{m(2)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{is}^n \\ a_{qr}^m a_{jr}^n \end{pmatrix}, \\ \sigma_{ij}^{mn(3)} &= \sigma_{pq}^{m(3)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{is}^n \\ a_{qr}^m a_{jr}^n \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (17)$$

Выражения (17) принято называть коэффициентами влияния напряжений, которые вызывает соответствующее единичное решение для элемента с номером m в центре элемента с номером n . Причём напряжения (17) соответствуют базису e_1^n, e_2^n, e_3^n .

Это позволяет найти вклад в граничные условия в напряжениях в форме девяти матриц размерности $(N \times N)$, где N – общее количество граничных элементов

$$\left. \begin{aligned}A_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(1)} = \sigma_{pq}^{m(1)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{3s}^n \\ a_{qr}^m a_{kr}^n \end{pmatrix}, \\ B_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(2)} = \sigma_{pq}^{m(2)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{3s}^n \\ a_{qr}^m a_{kr}^n \end{pmatrix}, \\ C_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(3)} = \sigma_{pq}^{m(3)} \begin{pmatrix} a_{ps}^m a_{3s}^n \\ a_{qr}^m a_{kr}^n \end{pmatrix},\end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Коэффициенты D_1^m, D_2^m, D_3^m (их количество $3N$) определяются из граничных условий. Суммируя с неопределёнными коэффициентами вклады (18), которые вносит каждый элемент в центр элемента с номером n , и, используя граничные условия, получим линейную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(1)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(1)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(1)} D_3^m &= b_1^n, \\ \sum_{m=1}^N A_{mn}^{(2)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(2)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(2)} D_3^m &= b_2^n, \\ \sum_{m=1}^N A_{mn}^{(3)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(3)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(3)} D_3^m &= b_3^n,\end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Введём общий вектор из коэффициентов и вектор правой части (19) в следующей форме

$$\begin{aligned}D &= (D_1^1, D_1^2, \dots, D_1^N, D_2^1, D_2^2, \dots, D_2^N, D_3^1, D_3^2, \dots, D_3^N), \\ b &= (b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^N, b_2^1, b_2^2, \dots, b_2^N, b_3^1, b_3^2, \dots, b_3^N).\end{aligned}\quad (20)$$

Если сформировать глобальную матрицу коэффициентов влияния в виде

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} A_{mn}^{(1)} & B_{mn}^{(1)} & C_{mn}^{(1)} \\ A_{mn}^{(2)} & B_{mn}^{(2)} & C_{mn}^{(2)} \\ A_{mn}^{(3)} & B_{mn}^{(3)} & C_{mn}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

то система уравнений (19), с учетом (21), переписывается в векторной форме

$$\widehat{M} D^t = b^t, \quad (22)$$

где D^t, b^t – транспонированные векторы (20).

Таким образом, задача сводится к решению линейной системы уравнений (22). Если эта задача решена, то определение перемещений и напряжений в любой точке (X, Y, Z) глобальной системы координат сводится к следующей последовательности действий:

В цикле по переменной $m = 1 \dots N$ определяем перемещения $u_i(X, Y, Z)$ и напряжения $\sigma_{ij}(X, Y, Z)$.

1).Находим координаты данной точки в локальной системе координат с базисом e_1^m, e_2^m, e_3^m с использованием матрицы перехода (12)

$$X^m = F^m \cdot (X - R^{(m)}). \quad (23)$$

2).Вычислим величину перемещений и напряжений U_i^m, Σ_{ij}^m , ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) с помощью формул (14).

3).После перехода в глобальную систему координат, получим вклад элемента с номером m в перемещения и напряжения в глобальной системе координат:

$$u_j^m = U_i^m a_{ij}^m, \quad \Sigma_{ij}^m a_{iq}^m a_{jp}^m = \sigma_{pq}^m.$$

4).Суммируем в цикле полученные вклады

$$u_i(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^N U_i^m, \quad \sigma_{ij}(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^N \Sigma_{ij}^m. \quad (24)$$

Таким образом, формулы (24) завершают определение перемещений и напряжений в произвольной точке области решения.

Результаты расчетов и тестирования. Изложенный метод был реализован в виде программы. Ниже приводятся численные результаты. В первую очередь, программа была оттестирована путём сравнения с известными аналитическими решениями. В качестве задач тестирования были выбраны следующие аналитические результаты:

1).Круглая плоская трещина радиуса $R = a$ находится под внутренним давлением p и расположена в плоскости $z = 0$. Теоретическое решение [17] для напряжения $\sigma_0(r) = \sigma_{zz}(r, z)|_{z=0}$ на продолжении трещины $r > a$ имеет вид

$$r > a \quad \sigma_0(r) = \frac{2pa}{\pi \sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{2p}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}.$$

На Рис. 2 представлены результаты сравнения с численным решением для трещины $R = 1$, $p = 0.1$.

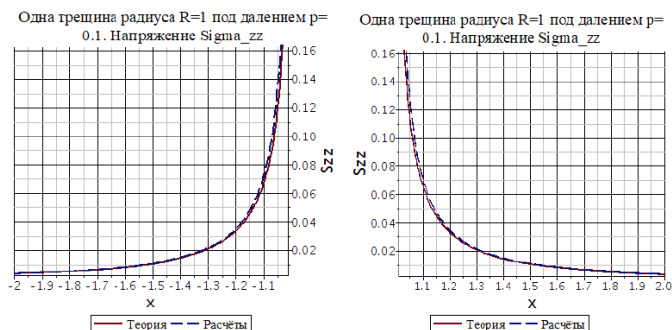


Рис. 2. Круглая плоская трещина радиуса $R = 1$ под внутренним давлением $P = 0.1$.

Основной характеристикой линейной механики разрушения является коэффициент интенсивности напряжений (КИН) $K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sigma_{zz} \sqrt{2\pi(r-a)}$.

В аналитическом решении для круглой трещины его величина равна

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{r \sigma_{zz}(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Эта задача решалась численно в трёхмерной постановке для разных радиусов, с количеством граничных элементов равным 300.

Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.		
Радиус трещины R (м)	20	25
Численное значение K_I/μ ($<1/2$)	0,0063	0,0074
Теоретическое значение K_I/μ ($<1/2$)	0,0051	0,0056

2). Задача для двух круглых плоских параллельных, одноосных трещин одинакового радиуса $R = a$, которые находятся под давлением P на расстоянии $2h$ друг от друга, рассмотрена в монографии [17]. Её решение сведено к системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_1(x,t) \varphi(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_1(x,t) \psi(t) dt = -\frac{4}{\pi} P$$

$$\psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_2(x,t) \tau(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_2(x,t) \varphi(t) dt = \frac{4}{\pi} C$$

Где константа C определяется дополнительным условием $\int_0^a \psi(t) dt = 0$, а ядра уравнений даются следующими формулами

$$K_1(x,t) = \frac{16h^3}{((t+x)^2 + 4h^2)^2} + \frac{16h^3}{((t-x)^2 + 4h^2)^2} - \frac{16h^3}{((a+x)^2 + 4h^2)^2} - \frac{16h^3}{((a-x)^2 + 4h^2)^2}$$

$$L_1(x,t) = 4h^3 \frac{4h^2 - 3(t+x)^2}{((t+x)^2 + 4h^2)^3} + 4h^3 \frac{4h^2 - 3(t-x)^2}{((t-x)^2 + 4h^2)^3}$$

$$K_2(x,t) = -\frac{4h(t+x)^2}{((t+x)^2 + 4h^2)^2} - \frac{4h(t-x)^2}{((t-x)^2 + 4h^2)^2}$$

$$L_2(x,t) = \frac{2h}{(t+x)^2 + 4h^2} + \frac{2h}{(t-x)^2 + 4h^2} - \frac{2h}{(a+x)^2 + 4h^2} - \frac{2h}{(a-x)^2 + 4h^2}$$

Напряжение на продолжении трещины $r > 1$ выражается формулой

$$\sigma_0(r) = \int_0^a \varphi(t) \Phi(r,t) dt + \int_0^a \psi(t) \Psi(r,t) dt,$$

где функции Φ, Ψ равны следующим выражениям:

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right] + \frac{1}{2} Re \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h+it)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h+ia)^2}} \right] +$$

$$+ h Re \left\{ \frac{2h+it}{[\sqrt{r^2 + (2h+it)^2}]^3} - \frac{2h+ia}{[\sqrt{r^2 + (2h+ia)^2}]^3} \right\}$$

$$\Psi(r,t) = h^2 Re \left\{ \frac{3(2h+t)^2}{[\sqrt{r^2 + (2h+it)^2}]^3} - \frac{1}{[\sqrt{r^2 + (2h+ia)^2}]^3} \right\}$$

Нам удалось, после решения интегральных уравнений, определить функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и восстановить аналитическую зависимость напряжения $\sigma_0(r) = \sigma_{zz}(r,z)|_{z=0}$ для значений параметров $R = 1$, $2h = 0.6$, $p = 0.1$. Результаты сравнения аналитического и численного решения представлены на Рис.3.

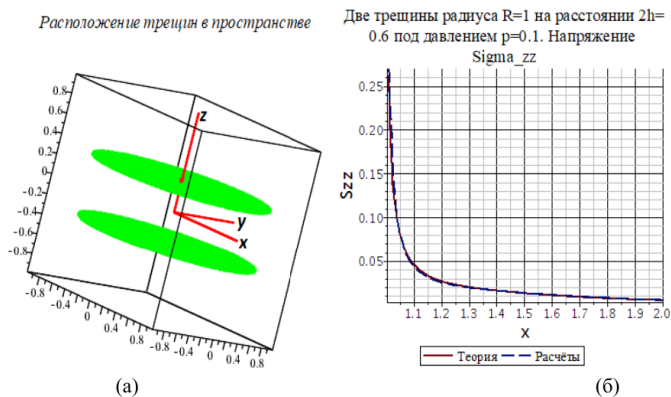


Рис. 3. (а) – трещины радиуса $R = 1$ расположены параллельно плоскости $z = 0$ строго одна над другой на расстоянии $2h = 0.6$ между их плоскостями. Обе трещины находятся под внутренним давлением $P = 0.1$; (б) – зависимость напряжения $\sigma_{zz}(x)$ на продолжении трещины.

Результаты сравнения с [24–25] эллиптической трещины с разным отношением полуосей, под внутренним давлением приведены на Рис.4.

На рис.5(а),(б),(с) по результатам расчетов приведены графики распределения по углу коэффициентов интенсивности напряжений на границе для круглой трещины. Трещина находится в плоскости (x,y) под действием косой нагрузки. Вектор напряжений нагрузки лежит в плоскости (x,z) . Каждая из четырёх кривых соответствует своему углу наклона вектора напряжений – $(0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ к оси x . На Рис.5(д) приведены аналогичные зависимости для инвариантного J –интеграла Черепанова – Райса [26–27].

Ещё одна серия расчётов была проведена для действия чисто сдвиговой нагрузки. Эллиптическая трещина расположена в плоскости (x,y) . Большая полуось расположена на оси x . Сдвиговая нагрузка действует вдоль большей полуоси по направлению оси x . Все трещины имеют одинаковую площадь π . Результаты расчётов сравнивались со справочником [24–25]. На Рис.6. приведены графики распределения $K_{II}/K_{II}(0^\circ)$ от угла, соответствующего точке границы. Этот угол отсчитывается от большей полуоси эллипса. По оси абсцисс отложен угол, По оси ординат отношение сдвигового коэффициента интенсивности напряжений K_{II} к его величине максимальной величине $K_{II}(0^\circ)$ (эта величина реализуется для угла, равного нулю).

На Рис.7 аналогичные зависимости представлены для третьего коэффициента интенсивности $K_{III}/K_{III}(90^\circ)$. Величина $K_{III}(90^\circ)$ соответствует углу 90° , при котором она максимальна.

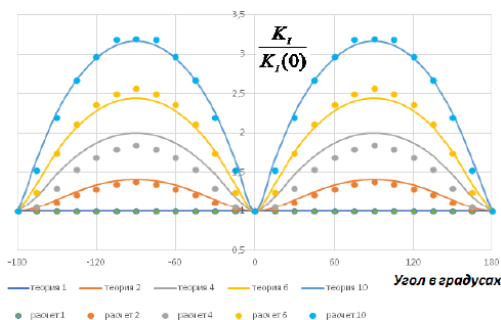


Рис. 4. Распределение $K_I/K_I(0)$ по границе трещины нормального отрыва при различных соотношениях полуосей. Отношение большей полуоси к меньшей полуоси соответствует номеру расчета. Все трещины имеют одинаковую площадь π . Число г.э. 4669, модуль Юнга = $2,5 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Величина $K_I(0)$ —соответствует нулевому углу, отсчитываемому от большей полуоси.

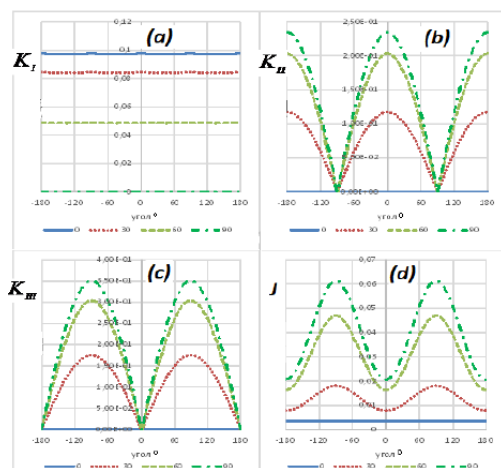


Рис. 5. Круглая трещина единичного радиуса расположена в плоскости (x,y) и находится под действием постоянной кривой нагрузки (вектор нагрузки действует в плоскости (x,z)). Распределение K_I — (a), K_{II} — (b), K_{III} — (c) и J -интеграла (d) по границе круглой трещины, для различных углов наклона вектора напряжения к оси x . Модуль вектора напряжений равен 0,1, число г.э. 4669, модуль Юнга = $2,5 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

Приведенные расчёты достаточно хорошо согласуются с результатами других авторов и справочным зависимостям. В работах [20-21] было проведено исследование взаимного влияния двух трещин друг на друга в зависимости от расстояния и угла меж-

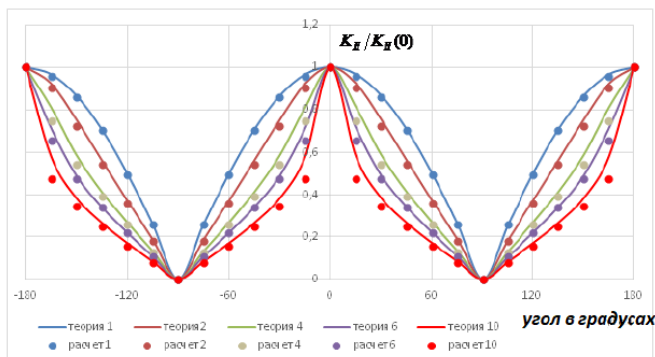


Рис. 6. Распределение $K_{II}/K_{II}(0^\circ)$ по границе эллиптической в плане трещины при действии сдвиговой нагрузки для различных значений отношения полуосей a/b , $a \geq b$. Теоретические кривые соответствуют справочнику Ю. Мураками, точки – расчетным значениям. Номер расчета соответствует значению отношения полуосей. Все трещины имеют одинаковую площадь π . Модуль Юнга = $2,5 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

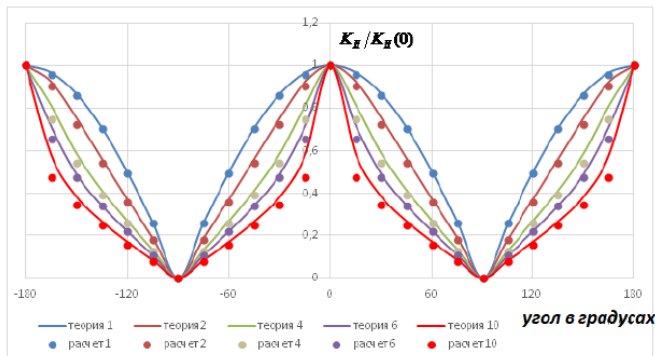


Рис. 7. Распределение $K_{III}/K_{III}(90^\circ)$ по границе эллиптической в плане трещины при действии сдвиговой нагрузки для различных значений отношения полуосей a/b , $a \geq b$. Номер расчёта равен значению отношения полуосей. Остальные параметры соответствуют Рис.6.

ду плоскостями круглых в плане трещин. Полученные результаты позволяют сделать вывод о достаточной эффективности разработанного метода. Следует отметить сравнительно малое время отдельного расчёта, которое варьируется от минуты до получаса в зависимости от количества граничных элементов (максимальное количество граничных элементов, использованное в расчётах, было равно 8000, оно фактически ограничивается оперативной памятью используемого персонального компьютера). Следует отметить

сравнительно малое время отдельного расчёта, которое при использовании ноутбука MSI GF63RC (Intel Core i7-8750H 2200МГц, 8Гб) составило:

Число элементов	3906	6509	8021	8628
Время расчета(с)	37	102	178	237

При этом дальнейшее увеличение числа элементов ограничено размером оперативной памяти компьютера.

По результатам проведенных расчётов можно сделать следующие выводы:

- 1). Предложенный метод показал хорошие результаты сравнения с имеющимися аналитическими и численными результатами;
- 2). Необходима дальнейшая работа по совершенствованию точности расчётной методики нахождения КИН.
- 3). В трёхмерном случае КИН убывает с ростом расстояния существенно быстрее, чем в плоском случае двумерных трещин;
- 4). Наличие второй трещины в плоскости основной трещины заметно увеличивает КИН в том случае, если расстояние между ними – меньше характерного размера (радиус трещины);
- 5). При расположении плоскостей двух трещин под углом, КИН нормального разрыва нелинейно быстро убывает с ростом угла между плоскостями;
- 6). Наличие свободной границы, перпендикулярной плоскости трещины ведёт к увеличению КИН, наличие жёсткой границы – к его уменьшению.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01111.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. H. Wen and M. H. Aliabadi A contour integral for the evaluation of stress intensity factors. Appl. Math. Modelling. Vol. 19, 1995, P. 450-454
2. Husain Jubran Al-Gahtani , Nicholas J. Altiero Application of the boundary element method to rubber-like elasticity. Applied Mathematical Modelling. 1996, Vol. 20, p. 651- 661
3. N.R.F. Elfakhakhre, N.M.A. Nik Long, Z.K. Eshkuvatov Stress intensity factor for an elastic half plane weakened by multiple curved cracks. Applied Mathematical Modelling, Vol. 60 (2018), p. 540-551
4. A.R. Shahani, S.A. Tabatabaei Computation of mixed mode stress intensity factors in a four-point bend specimen. Applied Mathematical Modelling. Vol. 32 (2008) 1281-1288
5. Xiangqiao Yan A boundary element analysis for stress intensity factors of multiple circular arc cracks in a plane elasticity plate. Applied Mathematical Modelling. Vol. 34 (2010) 2722-2737
6. Mohit Pant, I.V. Singh, B.K. Mishra Evaluation of mixed mode stress intensity factors for interface cracks using EFGM. Applied Mathematical Modelling. Vol. 35 (2011) 3443-3459
7. Shouetsu Itou, Stress intensity factors for three cracks at the interfaces of a graded layer bonding two different materials. Applied Mathematical Modelling. Vol. 37 (2013) 2516-2530
8. Changzheng Cheng , Zhongrong Niu, Naman Recho Analysis of the stress singularity for a bi-material V-notch by the boundary element method. Applied Mathematical Modelling. Vol. 37 (2013) 9398-9408
9. Xiaolin Li. An interpolating boundary element-free method for three-dimensional potential problems. Applied Mathematical Modelling. Vol. 39 (2015) 3116-3134

10. Gao Lin, Shan Lu, Jun Liu Duality system-based derivation of the modified scaled boundary finite element method in the time domain and its application to anisotropic soil. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 40 (2016) 5230-5255
11. Changzheng Cheng, Shenyu Ge, Shanlong Yao, Zhongrong Niu. Thermal stress singularity analysis for V-notches by natural boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 40 (2016) 8552-8563
12. Sergio Gustavo Ferreira Cordeiro, Edson Denner Leonel. Mechanical modelling of three-dimensional cracked structural components using the isogeometric dual boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 63 (2018) 415-444
13. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР. Издательство «Наукова думка» - Киев. 1989. 288 с.
14. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике /Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 248с.
15. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках / Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 494с.
16. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Изд-во МИР. 1987. 328 с.
17. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во «Наука». 1967. 402 с.
18. Гольдштейн Р.В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде /7 Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1979. - № 3. С. 111-126
19. M.K. Kassir and G.C. Sih. External crack in elastic solid. // *The international Journal of Fracture Mechanics*. Vol. 4, Nr. 4, 1968, p. 347-356
20. Акулич А.В., Звягин А.В., Шамина А.А. Численное моделирование взаимодействия диско-образных трещин в трехмерном упругом пространстве. В сборнике XVII Международная конференция "Супервычисления и математическое моделирование место издания РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров. 2018.
21. Звягин А.В., Смирнов Н.Н., Панфилов Д.И., Шамина А.А. Метод граничных элементов для численного решения трехмерных задач механики трещин. В журнале Вестник кибернетики, издательство СурГУ (*Сургут*), том 30, № 2, 2018, с. 18-31.
22. В. Новацкий Теория упругости. – М.: Издательство «МИР».1975. 872 с.
23. Треффц Е. Математическая теория упругости. – М.: Издательство ГТТЛ, 1934.
24. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 1: Пер. с англ./Под ред. Ю., Мураками. – М.: Изд. Мир, 1990. 448 с.
25. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 2: Пер. с англ./Под ред. Ю., Мураками. – М.: Изд. Мир, 1990. – 1016 с.
26. Rice J. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968, 35, 379-386
27. Cherepanov G. P. Crack propagation in continuous media. *J. Appl. Math. Mech.* 1967, 31, 503-512

ОДНО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ О РАСКРЫТИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ли Кайжуй, Киселев А. Б.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва

kerryli1989@yandex.ru

Рассматривается типичная задача полутрещины гидроразрыва под действием неоднородного давления. Ввиду нестандартного распределения давления в гидравлической трещине предлагается необычное предположение для решения задачи со смешанными граничными условиями. Используя интегральные свойства функции Бесселя, получено приближенное аналитическое решение зависимости ширины от неоднородного давления, которое удовлетворяет всем граничным условиям. Анализ погрешности этого метода показывает, что чем меньше наклон кривой распределения давления, тем точнее это решение. Погрешности возрастают вблизи скважины, и уменьшаются вдали от скважины. Самое главное в том, что по мере роста трещины, погрешность относительно точного решения убывает.

Ключевые слова: гидравлическая полутрещина, ширина, неоднородное давление, аналитическое решение, функция Бесселя.

ONE ANALYTICAL SOLUTION FOR THE WIDTH OF A HYDRAULIC FRACTURE TAKING INTO ACCOUNT THE INHOMOGENEOUS INTERNAL PRESSURE

Li Kairui, Kiselev A. B.

Moscow M.V. Lomonosov State University, Moscow

kerryli1989@yandex.ru

The typical problem of a hydraulically driven fracture under the action of a non-uniform pressure is considered. Due to the non-standard pressure distribution in a hydraulic fracture, an unusual assumption is proposed for solving the problem with mixed boundary conditions. Using the integral properties of the Bessel function, an approximate analytical solution was obtained for the dependence of the width on inhomogeneous pressure, which satisfies all the boundary conditions. Analysis of the error of this method shows that the smaller is the slope of the pressure distribution curve, the more accurate is this solution. Errors increase near the well, and decrease far from the well. The most important thing is that as the crack grows, the error with respect to the exact solution decreases.

Keywords: hydraulic fracture, width, inhomogeneous pressure, analytical solution, Bessel function.

1. Введение

По мере развития нефтяной промышленности технология гидроразрыва становится все более важной. В этой технологии одним из самых важных параметров является ширина трещины. В большинстве аналитических или численных методов для расчета перемещения берегов трещины в плоской задаче [1-5] трещины считаются симметричными (форма и давление симметричны относительно середины трещины). Такая трещина называется трещиной Гриффитса (рис. 1а) и часто используется в гидроразрыве, как в типичной модели РКН (модель трещины Перкинса и Керна), так и в модели КГД (модель трещины Христиановича и Желтова) [6-9].

На самом деле, в некоторых особых случаях нужно отдельно рассматривать полутрещину (рис. 1б), например при моделировании неоднородного пласта. Материальные свойства двух половин трещины разные. В таком случае традиционные методы или сложны, или непригодны для этой задачи. В этой работе мы попробуем найти простое аналитическое соотношение для зависимости ширины от давления, которое будет удобно для расчетов и будет удовлетворять требованиям точности.

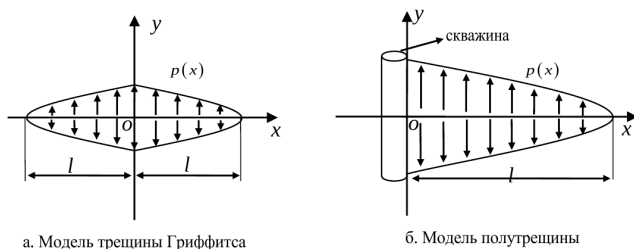


Рис. 1. Схема двух моделей

2. Математическая постановка задачи

В полубесконечной изотропной упругой плоскостихоу ($x > 0$) расположена линейная половина трещины длиной l вдоль оси x , с началом координат в точке пересечения поверхности скважины и сечения трещины (рис. 1б). На берегах трещины приложено давление $p(x)$. Уравнения равновесия для плоской деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обобщённый закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x], \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ — компоненты тензора деформаций, u_x, u_y — компоненты вектора перемещения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Из-за того, что существование скважины ограничивает горизонтальную деформацию, перемещение в направлении оси x на поверхности ($x = 0, -\infty < y < +\infty$) u_x равно нулю, что отличается от модели полутрещины Гриффитса в полубесконечной плоскости [10]. Остальные граничные условия одинаковы с представленными в работе [10]. Давление симметрично относительно оси x , так что нужно учитывать только часть $y > 0$:

$$\begin{aligned} x = 0, y > 0 : u_x &= 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty : \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \\ y = 0, 0 < x < \infty : \tau_{xy} &= 0, \\ y = 0, 0 \leq x \leq l : \sigma_y &= -p(x), \\ y = 0, x > l : u_y &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $p(x)$ — давление в трещине

3. Решение задачи

Вводится гармоническая функция $\Phi(x, y)$, для которой выполняется:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (5)$$

и комбинируя уравнения (1), (2), (3), (5), получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (6)$$

σ_y симметрична относительно оси x , это значит, что $\Phi(x, y)$ тоже симметрична относительно x . Поэтому можем сделать преобразование Фурье-косинуса функции $\Phi(x, y)$:

$$G(\omega, y) = \int_0^\infty \Phi(x, y) \cos(\omega x) dx. \quad (7)$$

и ее обратное преобразование:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(\omega, y) \cos(\omega x) d\omega. \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в уравнение (6), получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \omega^2 \right)^2 G = 0. \quad (9)$$

Согласно первому граничному условию, при $y \rightarrow \infty$ все напряжения стремятся к нулю, поэтому приведем такую форму решения уравнения (9):

$$G(y, \omega) = (A + By) e^{-\omega y}. \quad (10)$$

Здесь коэффициенты A и B — функции только от ω , причем $\omega > 0$.

Когда $y = 0$, для всех x , $\tau_{xy} = 0$, то есть

$$\tau_{xy}|_{y=0} = -\omega \frac{\partial G}{\partial y} = -\omega e^{-\omega y} (B - A\omega - By\omega)|_{y=0} = 0.$$

Для коэффициентов $A(\omega), B(\omega)$ получаем соотношение:

$$B = A\omega. \quad (11)$$

Воспользовавшись этим соотношением, напряжения и перемещения можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A\omega^2 (-1 + \omega y) e^{-\omega y}] \cos(\omega x) d\omega, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega^3 A y e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty -A\omega^2 (1 + \omega y) e^{-\omega y} \cos(\omega x) d\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2(1+\nu)}{E\pi} \int_0^\infty A\omega (2\nu - 1 + \omega y) e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega, \\ u_y &= \frac{2(1+\nu)}{E\pi} \int_0^\infty A\omega (2 - 2\nu + \omega y) e^{-\omega y} \cos(\omega x) d\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно третьему и четвертому граничным условиям (4), когда $y = 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= \frac{2}{E} \int_0^\infty -A\omega^2 \cos(\omega x) d\omega = -p(x) & 0 \leq x \leq l, \\ u_y|_{y=0} &= \frac{2(1+\nu)}{E\pi} \int_0^\infty A\omega (2 - 2\nu) \cos(\omega x) d\omega = 0 & x > l. \end{aligned}$$

После сокращения этих уравнений, получается система интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A\omega^2 \cos(\omega x) d\omega &= -\frac{\pi}{2} p(x) & 0 \leq x \leq l, \\ \int_0^\infty A\omega \cos(\omega x) d\omega &= 0 & x > l. \end{aligned} \quad (14)$$

Известно, что функция Бесселя имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_1(\omega a) \cos(\omega x) d\omega &= \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) & x > a, \\ \frac{1}{a} & x \leq a. \end{cases} \\ \int_0^\infty J_1(\omega a) \frac{\cos(\omega x)}{\omega} d\omega &= \begin{cases} 0 & x > a, \\ \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} & x \leq a. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь a — константа, x — переменная.

Сравнивая систему уравнений (14) и систему уравнений (15), мы делаем необычное предположение, что

$$A\omega^2 = g(x) \cdot J_1(\omega l). \quad (16)$$

Здесь $g(x)$ — коэффициентная функция. Следует отметить, что предположение (16) действительно, потому что в уравнениях (14) функция $p(x)$ является непрерывной монотонно убывающей функцией, причем знак давления не изменяется. Характеристики давления $p(x)$ можно получить из работ [11–15].

Подставим уравнение (16) в уравнение (14), и получим

$$\begin{aligned} g(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) \cos(\omega x) d\omega &= -\frac{\pi}{2} p(x) & 0 \leq x \leq l, \\ g(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) \frac{\cos(\omega x)}{\omega} d\omega &= 0 & x > l. \end{aligned} \quad (17)$$

Сравнивая уравнение (15) с уравнением (17), возьмем $a = l$, потом подставим результаты в уравнения (17), получим

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{\pi l}{2} p(x), \\ A\omega^2 &= -\frac{\pi l}{2} p(x) J_1(\omega l). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим решение (18) в выражения напряжений (12) и перемещений (13),

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -lp(x) \int_0^\infty [(-1 + \omega y) e^{-\omega y}] J_1(\omega l) \cos(\omega x) d\omega, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = lp(x) y \int_0^\infty J_1(\omega l) \omega e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = lp(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) (1 + \omega y) e^{-\omega y} \cos(\omega x) d\omega. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(1+\nu)}{E} lp(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) (2\nu - 1 + \omega y) e^{-\omega y} \frac{\sin(\omega x)}{\omega} d\omega, \\ u_y &= \frac{(1+\nu)}{E} lp(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) (2 - 2\nu + \omega y) e^{-\omega y} \frac{\cos(\omega x)}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Потом подставляя результаты (19) и (20) в уравнение (4), перепроверим граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0, y > 0: \quad u_x &= 0 \\ \tau_{xy}|_{y=0} &= lp(x)y \int_0^\infty J_1(\omega l) \omega e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega = 0 \quad 0 \leq x \leq \infty, \\ \sigma_y|_{y=0} &= lp(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) \cos(\omega x) d\omega = -p(x) \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_y|_{y=0} &= \frac{2(1-\nu^2)}{E} lp(x) \int_0^\infty J_1(\omega l) \frac{\cos(\omega x)}{\omega} d\omega = 0 \quad x > l. \end{aligned}$$

Все граничные условия выполняются, поэтому когда $y = 0, 0 \leq x \leq l$, перемещение берега трещины:

$$u_y = \frac{2(1-\nu^2)}{E} p(x) \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (21)$$

И ширина трещины:

$$w(x) = 2u_y = \frac{4(1-\nu^2)}{E} p(x) \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (22)$$

4. Традиционные решения для модели трещины Гриффитса

Используя принцип суперпозиции и симметрию, Hiroshi Tada, Paris P. C. и Irwin G. R. [5] получают решение для ширины полной трещины:

$$w(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi} \int_{-l}^l p(x) \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 - x^2} + \sqrt{l^2 - \zeta^2}}{\sqrt{l^2 - x^2} - \sqrt{l^2 - \zeta^2}} \right| d\zeta. \quad (23)$$

Наиболее известным численным методом для плоской задачи полной трещины является Метод разрывных смещений (сокращенно МРС) [4]. Симметричная трещина разделится на n отрезков длиной $2\Delta l$. Согласно выражению $u(x)$ приложенное к каждому отрезку давление $p(x_i)$ известно. Для линейной трещины без сдвигового смещения напряженное граничное условие каждого отрезка на береге трещины выполняется так:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= \sigma_y(x_i, 0) = \sum_{j=1}^n A_y^{ij} D_y^j \\ A_y^{ij} &= \frac{-\Delta l E}{2\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{(x_i - x_j)^2 - (\Delta l)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

x_i, x_j — координата середины i -го и j -го отрезков, A_y^{ij} — коэффициент влияния разрыва смещения отрезка j , на отрезок i , D_y^j — разрывное смещение j -го отрезка.

Каждому отрезку соответствует уравнение (24) с одним неизвестным D_y^j , поэтому n отрезков дают n уравнений с n неизвестными $D_y^j (i, j = 1 \dots n)$, формирующими систему уравнений. Наконец, решение системы уравнений D_y^j представляет собой ширину трещины.

Другие аналитические решения рассмотрены в работах [2,3]. Эти решения эквивалентны друг другу, различаясь лишь в видах выражений решения, которые зависят от выбранных методов решения. Ниже мы будем сравнивать и анализировать полученное в этой работе решение и вышеуказанные решения при четырех типичных распределениях давления в соответствии с характеристикой распределения давления в работах [11-15]. Здесь через подбор формул по кривым распределения давления по разным моделям и условиям из этих работ, получаются четыре выражения распределения давления на

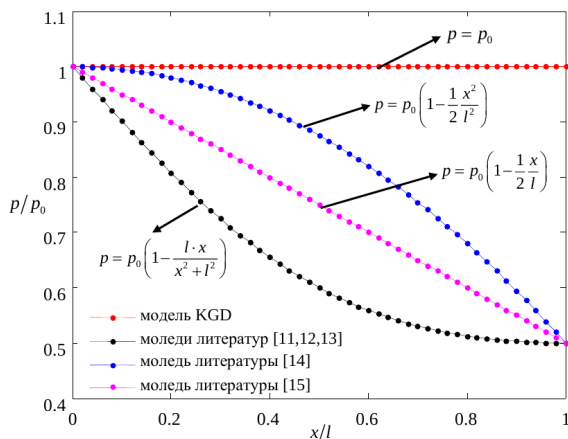


Рис. 2. Некоторые виды типичных распределений давления из работ [11-15]

рис. 2. Графики этих выражений приближают распределения давления в работах [11-15], соответственно, не совсем совпадают. На рис. 2 p_0 — давление в начале трещины, самое большее.

5. Сравнительный анализ численных результатов

Основные параметры расчета: модуль Юнга $E = 30 \text{ GPa}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, длины полутрещины $l = 1, 10, 50 \text{ m}$, наибольшее давление $p_0 = 2 \text{ MPa}$. Четыре выражения для давления:

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \\ p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right) \\ p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l}\right) \\ p_0 \left(1 - \frac{l \cdot x}{x^2 + l^2}\right) \end{cases} \quad (25)$$

Рассмотрим результаты для трёх вычислительных методов: аналитическое решение, представленное в этой работе, метод MPC и решение Igrwin в работе [4,5]. Для каждого выражения распределения давления в уравнении (25), результаты представлены на рис. 3-6.

Заметим, что на рис. 3, 4, 5 и 6 все результаты этой работы хорошо совпадают с результатами методов MPC и Igrwin вдали от скважины, и только вблизи скважины отличие результатов больше. Наибольшая погрешность равная 0.5×10^{-4} , по сравнению с реальной шириной очень мала. В таблице 1 показываются наибольшие относительные погрешности в начале трещины при разных распределениях давления.

Из таблицы 1 получается, что при последнем типе распределения давления относительная погрешность самая большая, отличается сильно от точного значения, но согласно работе [16] этот тип распределения давления проявляется на протяжении очень малого промежутка времени (порядка $10^{-(8 \sim 5)}$ секунд), потом переходит в тип

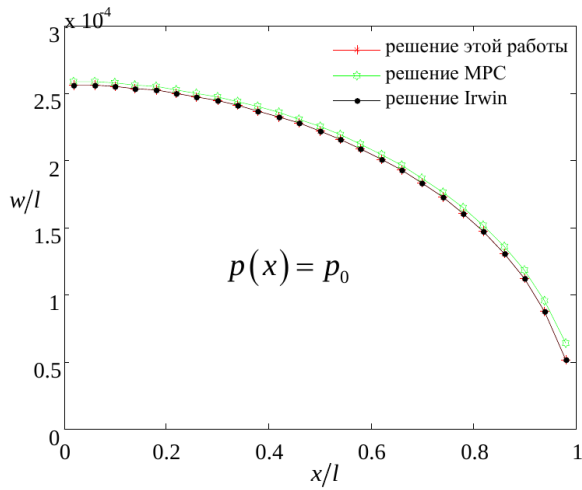


Рис. 3. Безразмерная ширина w/l от x/l под давлением $p = p_0$

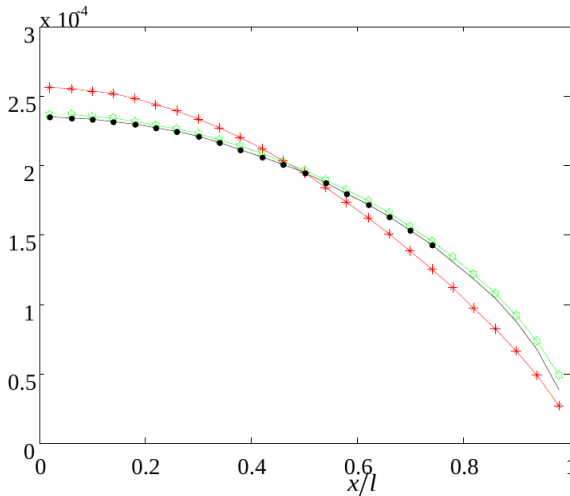


Рис. 4. Безразмерная ширина w/l от x/l под давлением $p = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right)$

$p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l}\right)$, дальше в тип $p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right)$, в конце концов стремится к однородному распределению. Поэтому согласно значениям из таблицы 1 мы считаем, что метод, представленный в этой работе удовлетворяет требованиям точности в инженерном рас-

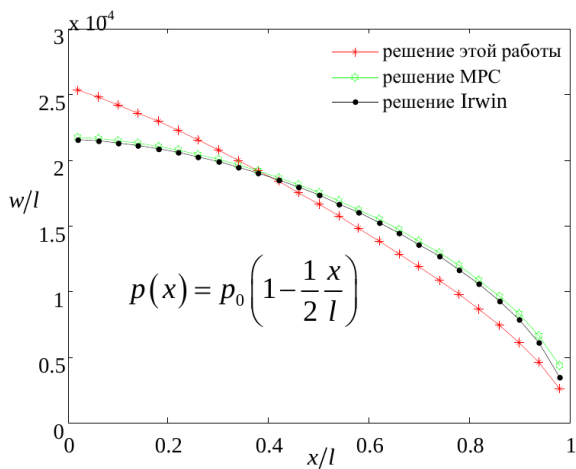


Рис. 5. Безразмерная ширина w/l от x/l под давлением $p = p_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$

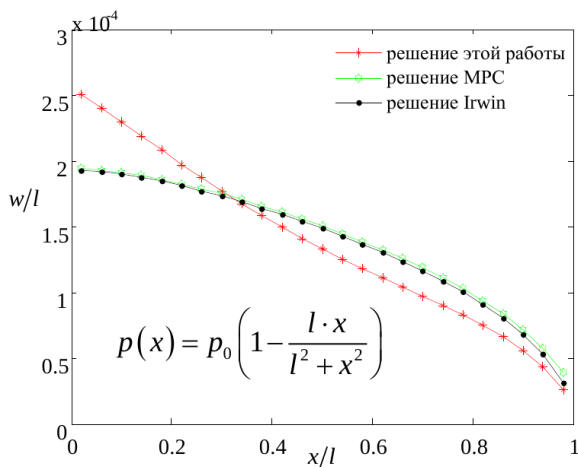


Рис. 6. Безразмерная ширина w/l от x/l под давлением $p = p_0 \left(1 - \frac{l \cdot x}{l^2 + x^2}\right)$

чете.

Графики выражений в уравнении (25) менее пологие на каждом последующем рисунке, это значит, что скорость падения давления больше для каждого последующего графика, и скорость падения четвертого распределения самая большая. Сравнивая результаты на рис. 3, 4, 5 и 6 со скоростью падения давления на рис. 2, получаем, что

Таблица 1

Наибольшие относительные погрешности для разных распределений давления

Типы распределений давления	p_0	$p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right)$	$p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l}\right)$	$p_0 \left(1 - \frac{l-x}{l^2+x^2}\right)$
Наибольшая относительная Погрешность	0	0,086	0,179	0,311

чем меньше скорость падения давления, тем больше совпадает результат метода этой работы с методами MPC и Igrwin: кривая $p(x) = p_0 \left(1 - \frac{l-x}{x^2+l^2}\right)$ наименее пологая, давление падает быстрее чем в других, и разница между результатами решения методом этой работы и методами MPC и Igrwin самая большая. Когда давление распределяется однородно ($p = p_0$ (скорость падения тождественно равно нулю), на рис. 3 результаты этих методов полностью совпадают. Это значит, что кривая распределения давления идёт более полого, и разница результатов становится меньше.

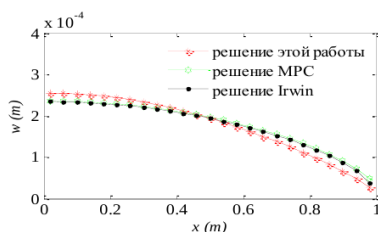
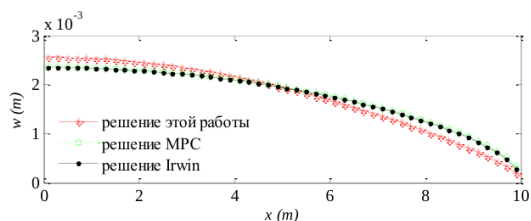
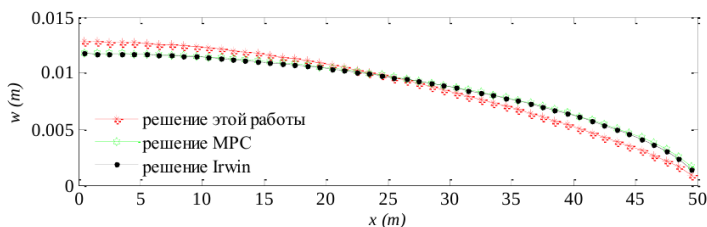
Таким образом, по мере того как трещина распространяется, средняя скорость падения давления становится меньше и меньше, кривая распределения давления становится всё более и более плавной и распределение давления стремится к однородному. Итак, согласно вышесказанному, ширина, вычисленная с использованием метода этой работы, стремится к вычисленной через методы MPC и Igrwin. Рис. 7(а, б, в) показывают изменение ширины с ростом трещины при одинаковом распределении давления. Эти результаты указывают на то, что с распространением трещины ширина, полученная методом этой работы, приближается к точной величине.

Несмотря на то, что существуют точные методы моделирования гидроразрыва (методы MPC и Igrwin), этот приближенный метод имеет смысл, поскольку у аналитического метода Igrwin есть большее ограничение: с одной стороны, он является интегральным выражением, поэтому его сложно подставить в уравнение неразрывности в частных производных. С другой стороны, точный результат можно найти только в том случае, если выражение распределения давления известно. А фактически, $p(x)$ — это неизвестная переменная, которую мы хотим найти. Также, хотя численный метод MPC имеет широкую сферу применения, его недостатком является то, что с одной стороны, условия для использования этого метода состоят в том, что среда должна быть однородная и трещина симметричная, поэтому метод не пригоден для изучения неоднородного пласта. С другой стороны, этот метод имеет большую вычислительную сложность. В некоторых ситуациях из-за итераций расчета и большого размера сеток метод MPC приходится использовать множество раз, чтобы получить точное решение, что негативно сказывается на скорости вычисления.

6. Выводы

Хотя решение, представленное в этой работе, не является точным решением как метод MPC и Igrwin, и имеет небольшую погрешность, но по мере того как трещина растет, эта погрешность становится все меньше, что позволяет пренебречь ей в некоторых случаях. Кроме того, оно имеет следующие преимущества:

- (1) оно является явным аналитическим решением, отличающемся от точного аналитического решения уравнения (23), которое является интегральным выражением от функции давления и не может быть подставлено в уравнение неразрывности как функция давления. Полученное же нами решение можно непосредственно подставить в уравнение неразрывности.

а. Трещина с длиной $l = 1 \text{ м}$ б. Трещина с длиной $l = 10 \text{ м}$ в. Трещина с длиной $l = 50 \text{ м}$ **Рис. 7.** Ширины трещины при давлении $p = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right)$ с различными длинами

- (2) Поскольку это аналитическое решение, требуется мало расчетов. Таким образом, при моделировании задач, требующих итераций и больших сеток для получения точного решения, когда численные методы, наподобие MPC серьезно ухудшают скорость расчета, метод этой работы может существенно сократить время расчета.

Следует отметить, что этот метод имеет ограничение: когда градиент давления изменяется очень быстро, результат решения этим методом будет иметь большую погрешность, и точность вычисления будет недостаточной. Но такая ситуация не характерна для задач гидроразрыва, что позволяет использовать этот метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Transactions of the Institute of Naval Architects. 1913. Vol. 55. P. 219–242.
2. Sneddon I. N., Elliot H. A. The opening of a griffith crack under internal pressure // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 262–267.
3. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.
4. Crouch S. L., Starfield A. M.. Boundary element methods in solid mechanics. 1983. George Allen & Unwin, London.
5. Hiroshi Tada, Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks handbook (third editon). 2000. ASME Press, New York.
6. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. Vol. 13. № 9. P. 937–949.
7. Nordgren R. P. Propagation of vertical hydraulic fractures // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1972. Vol. 12. № 4. P. 306–314.
8. Kristianovich S. A., Zheltov Y. P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous Fluids // Proceedings of the 4th World Petroleum Congress. Rome, 1955. Vol. 2. P. 579–586
9. Geertsma J, de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulic induced fractures // Journal of Petroleum Technology. 1969. Vol. 246. P. 1571–1581.
10. Sneddon I. N. Fourier transform solution of the quarter plane problem in elasticity, File PSR-99/6 (1971) Appl. Math. Res. Group, North Carolina State University.
11. Lisjak A., Kaifosh P., He L., Tatone B. S. A., Mahabadi O. K., Grasselli G. A 2D, fully-coupled, hydro-mechanical, FDEM formulaiton for modeliong fracturing processes in discontinuous,porou rock masses // Computers and Geotechnics. 2017. Vol. 81. P. 1–18.
12. Xu Yun, Chen Ming, Wu Qi, Li Deqi, Yang Nengyu, Weng Dingwei, Guan Baoshan. Stress interference calculation model and its application in volume stimulation of horizontal wells // PETROL. EXPLOR. DEVELOP. 2016. Vol. 43. № 5. P. 849–856.
13. Mohammad Norouz Oliaei, Ali Pak, Kenichi Soga. A coupled hydro-mechanical analysis for prediction of hydraulic fracture propagation in saturated porous media using EFG mesh-less method // Computers and Geotechnics. 2016. Vol. 55. P. 254–266.
14. Linmao Xie, Ki-Bok Min, Baotang Shen. Simulation of hydraulic fracturing and its interactions with a pre-existing fracture using displacement discontinuity method // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2016. P. 1–11.
15. Dontsov E. V., Peirce A. P.. Comparision of toughness propagation criteria for blade-like and pseudo-3D hydraulic fractures //Engineering Fractures Mechanics. 2016. Vol. 160. P. 238–247.
16. Ahmad Pouya, Van-Linh Nguyen, Siavash Ghabezloo. Hydraul fracture propation under steady state flow. The 48th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium (ARMA). Minneapolis, MN, USA, 1-4 June 2014.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА
ПОДВИЖНЫЙ ПРОВОДЯЩИЙ ЭКРАН**

Косинов С. Н., Никитин В. Ф., Тюренкова В. В., Смирнова М. Н.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской
академии наук», г. Москва,
skosinow@yandex.ru, vfrikster@gmail.com, tyurenkova.v.v@yandex.ru,
wonrims@inbox.ru

Защита бортовых электронных устройств, подверженных высокочастотному электромагнитному излучению, является важнейшей проблемой безопасности космических полетов. Настоящая работа содержит результаты теоретического исследования воздействия высокочастотного электромагнитного излучения на движущийся проводящий экран. Разработаны методы и представлены результаты, направленные на оценку защитных свойств проводящего экрана в зависимости от теплофизических и электромагнитных свойств материала, интенсивности и частоты излучения, а также относительной скорости источника излучения и цели.

Ключевые слова: бортовая защита, проводящий экран, электромагнитное поле, тепло Джоуля.

MATHEMATICAL MODELING OF HIGH FREQUENCY ELECTROMAGNETIC RADIATION IMPACT ON A MOVING CONDUCTIVE SCREEN

Kosinov S. N., Nikitin V. F., Tyurenkova V. V., Smirnova M. N.
Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis of Russian
Academy of Sciences, Moscow, Russia
skosinow@yandex.ru, vfrikster@gmail.com, tyurenkova.v.v@yandex.ru,
wonrims@inbox.ru

On board protection of electronic devices exposed to high-frequency electromagnetic radiation is a major safety concern for space flight. This article contains the results of a theoretical study of the effects of high-frequency electromagnetic radiation on a moving conductive screen. Methods have been developed and results are presented aimed at assessing the protective properties of a conductive screen depending on the thermophysical and electromagnetic properties of the material, the intensity and frequency of the radiation, and the relative speed of the radiation source and the target.

Keywords: on board protection, electromagnetic field, conducting screen, Joule heat.

Введение

Как известно, при воздействии электромагнитного поля высокой частоты на электронные приборы, в них могут возникать сбои или вовсе они могут выйти из строя. Защитой от переменного электромагнитного поля является слой проводящего материала. Такой материал полностью блокирует постоянное электрическое поле, но переменное, в том числе осциллирующее, поле наводит в проводнике переменный электрический ток, который сам является источником поля. Вместе с тем проникновение этого поля внутрь проводника происходит постепенно, по законам диффузии с коэффициентом, обратно пропорциональным проводимости материала и его магнитной проницаемости, и тем самым для малых значений этого коэффициента наведенное поле остается в узком skin-слое в окрестности внешней поверхности защитного кожуха. В то время как постоянное магнитное поле при этом продолжает по законам диффузии распространяться вглубь проводника, и в конце концов проникает внутрь защищаемой области, осциллирующее поле проникает лишь на определенную глубину. Это обстоятельство и обеспечивает

эффективность такой защиты, по крайней мере от внешнего поля не слишком малой частоты и не слишком большой интенсивности. Граница эффективности защиты от такого поля определяется прежде всего тем, что толщина скин-слоя должна быть меньше толщины защитного проводника (иначе поле проникнет вовнутрь). Однако, наведенный в проводнике ток вызывает выделение тепла Джоуля, нагревающего защитный кожух. При нагреве, во-первых, уменьшаются защитные свойства: убывает магнитная проницаемость (для ферромагнитных материалов), и одновременно убывает проводимость, тем самым глубина проникновения поля возрастает, а, во-вторых, нагрев выше некоторого критического значения может привести к разрушению защитного кожуха – расплавлению, испарению либо иному виду потери прочностных свойств с последующим разрушением. Поэтому важно подобрать такой материал, который выдерживает столь высокие температуры.

Математическая модель электромагнитного поля

Четыре основных уравнения Максвелла представляют собой:

Закон Гаусса для электрического поля:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_E. \quad (1)$$

Закон Гаусса для магнитного поля:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

Закон индукции Фарадея:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3)$$

Закон Ампера с поправкой Максвелла, или теорема о циркуляции магнитного поля:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции, $\mathbf{H}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{J}$ – вектор плотности тока, ρ_E – плотность электрического заряда.

Связь между векторными полями напряженности и индукции задается материальными соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, ε, μ – соответствующие безразмерные относительные величины для заданной материальной среды. Эти величины связаны со скоростью света в веществе:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (7)$$

Система (1) – (6) дополняется еще одним материальным соотношением – законом Ома.

Закон Ома запишем для проводника, движущегося со скоростью v_0 относительно источника электромагнитного поля. Эту величину считаем постоянной; интенсивность

ее изменения мала по сравнению с интенсивностью изменения всех прочих параметров. Удельную проводимость σ будем считать скалярной величиной.

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}). \quad (8)$$

Теперь будем использовать то, что компоненты электромагнитного поля можно считать быстро осциллирующими (характерное время осцилляций существенно меньше характерного времени процесса). С некоторым приближением компоненты поля можно считать линейной комбинацией, каждый из членов которой характеризуется собственной частотой ω_k (частота выражена здесь не в Герцах, а в радианах в секунду). Пусть какое-либо векторное или скалярное поле A , стоящее в уравнениях Максвелла, раскладывается во времени по косинусам:

$$A = \sum_k \hat{A}_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (9)$$

где $\hat{A}$ и ϕ – соответственно амплитуда колебаний и сдвиг по фазе. Выражение (9) можно записать в виде

$$A = \sum_k \hat{A}_k \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega_k t + \phi_k)} \right] = \sum_k \operatorname{Re} \left[\hat{A}_k e^{i\phi_k} e^{i\omega_k t} \right] = \sum_k \operatorname{Re} \left[\tilde{A}_k e^{i\omega_k t} \right],$$

где $\tilde{A} = \hat{A}e^{i\phi}$ – комплексная амплитуда, а сам метод называется методом комплексных амплитуд.

Будем считать, что зависимость комплексных амплитуд от времени существенно менее интенсивная, чем осцилляции самих величин с этой частотой. Тогда функции электромагнитного поля можно представить рядами Фурье.

$$\rho_E = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\rho}_{Ek} \exp(i\omega_k t),$$

$$\mathbf{J} = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\mathbf{J}}_k \exp(i\omega_k t),$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\mathbf{H}}_k \exp(i\omega_k t),$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\mathbf{E}}_k \exp(i\omega_k t),$$

$$\mathbf{D} = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\mathbf{D}}_k \exp(i\omega_k t),$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{Re} \sum_k \tilde{\mathbf{B}}_k \exp(i\omega_k t).$$

Уравнения Максвелла линейны, поэтому достаточно решить систему уравнений Максвелла для одной компоненты. Далее исследование будем проводить при какой-то одной базовой частоте ω . Уравнения Максвелла (1) – (4), материальные уравнения (5) – (6), а также закон Ома (7) в комплексных амплитудах будут выглядеть как:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho}_E, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\tilde{\mathbf{B}}, \quad (12)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + i\omega\tilde{\mathbf{D}}, \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}, \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{v}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}). \quad (16)$$

Исключим из (12), (13) и (16) индукции с помощью материальных уравнений (14) – (15), получим

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \quad (17)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + i\omega\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma (\tilde{\mathbf{E}} - \mu\mu_0\mathbf{v}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}). \quad (19)$$

Исключим из (18) и (19) магнитную напряженность с помощью (17), получим

$$\nabla \times \left(\frac{i}{\mu\mu_0\omega} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \right) = \tilde{\mathbf{J}} + i\omega\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}, \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma \left(\tilde{\mathbf{E}} - \frac{i}{\omega} \mathbf{v}_0 \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \right). \quad (21)$$

Система таким образом замкнулась. Если теперь подставить закон Ома (21) в закон Ампера – Максвелла (20), получим определяющее уравнение относительно амплитуды вектора электрического поля. Это уравнение удобно умножить на $i\omega\mu\mu_0$ и воспользоваться тождеством для скорости света (7):

$$-\mu\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i\frac{c^2}{\omega} \mu\mu_0\sigma \right) \tilde{\mathbf{E}} = \mu\mu_0\sigma\mathbf{v}_0 \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}. \quad (22)$$

Соотношение (22) будем считать основным определяющим уравнением, из решения которого будем получать все прочие амплитуды. В левой его части стоит модификация оператора Гельмгольца комплексным коэффициентом, в правой – член, отвечающий за влияние скорости источника поля.

Тепловое воздействие на проводник

Тепловые потоки в проводнике описываются его теплопроводностью и внутренним притоком тепла за счет процессов, связанных с переходом энергии электромагнитного поля в тепловую (тепла Джоуля). Моделировать этот процесс будем следующим образом:

$$\rho A_s \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q, \quad \text{где } Q = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (23)$$

Тепловое воздействие тока на проводник (23) является быстро осциллирующим, но всегда положительным. Поскольку время осцилляции считаем значительно меньшим времени самого процесса, в том числе времени аккумуляции тепловой энергии в теле, то вместо выражения для Q будем использовать осреднение притока тепла Джоуля по периоду времени $2\pi/\omega$. Если же электромагнитное поле составляется как композиция

с разными периодами, то для каждого слагаемого – осреднение по своему периоду. Тогда:

$$Q = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{J}} e^{i\omega t}] \cdot \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t}] dt =$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{Re} \tilde{\mathbf{J}} \cdot \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{E}} + \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{J}} \cdot \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{E}}). \quad (24)$$

Граничные условия для уравнения (23) могут быть трех видов:

- распределение температуры на поверхности тела,
- распределение потока тепла на поверхности тела, в том числе условие нулевого потока тепла (адиабатичность),
- условие излучения с поверхности, когда поступающее изнутри тепло излучается вовне по закону черного тела или аналогичному. Для модели черного тела имеем:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma_B T^4, \quad (25)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности, а σ_B – константа Стефана – Больцмана.

Постановка задачи

Рассматривается тонкая пластина, находящаяся в электромагнитном поле. Пластина является частью защиты. Направим ось Oz перпендикулярно пластине, оси Ox и Oy будут параллельно сторонам пластины. Кроме того, пластина движется со скоростью v_0 относительно источника электромагнитного поля.

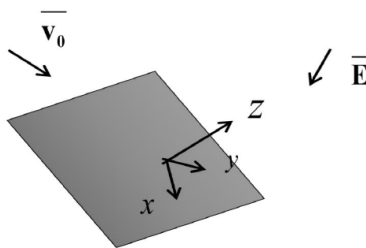


Рис. 1. Постановка задачи на пластине.

Запишем уравнения, описывающие электромагнитное воздействие на пластину, разбив на составляющие уравнение (22) (считаем, что относительная магнитная проницаемость в пластине постоянна):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_x =$$

$$= -\mu \mu_0 \sigma \left[v_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial E_x}{\partial z} - v_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_y =$$

$$= -\mu \mu_0 \sigma \left[v_x \frac{\partial E_y}{\partial x} - v_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial E_y}{\partial z} - v_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_z = \\ = -\mu \mu_0 \sigma \left[v_y \frac{\partial E_y}{\partial z} - v_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + v_x \frac{\partial E_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь перейдем к безразмерным координатам

$$x = L_{xy} \bar{x}, y = L_{xy} \bar{y}, z = L_z \bar{z},$$

где L_{xy} – размер пластины вдоль направлений Ох, Оу, L_z – размер вдоль толщины Оz, причем

$$\frac{L_z}{L_{xy}} \ll 1.$$

Тем самым, безразмерные координаты будут меняться в пространстве единичного куба:

$$0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1, 0 \leq \bar{z} \leq 1.$$

Перейдя в системе (26)-(28) к этим безразмерным координатам, и убрав из нее члены второго порядка малости, пропорциональные $(L_z/L_{xy})^2$, получим (сняв тильду с переменных для краткости):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_x = -\mu \mu_0 \sigma L_z v_z \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_y = -\mu \mu_0 \sigma L_z v_z \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (30)$$

$$-\frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) E_z = -\mu \mu_0 \sigma L_z \left[v_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + v_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]. \quad (31)$$

Решение системы уравнений (29) – (31) будем искать в виде

$$E_x = \varphi(x, y) A_x(z), E_y = \varphi(x, y) A_y(z), E_z = \varphi(x, y) A_z(z),$$

причем модуль скалярного множителя $\varphi(x, y)$ по порядку совпадает с 1, модуль же вектора $\mathbf{A}(z)$ имеет порядок модуля $\mathbf{E}$. Выбор такого решения оправдан тем, что решение системы определяет практически только второй множитель. После подстановки и деления на φ первых двух уравнений, и на A_z уравнения (31), получим

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) A_x = -\mu \mu_0 \sigma L_z v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) A_y = -\mu \mu_0 \sigma L_z v_z \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{A_z} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{1}{A_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) \varphi = \\ = -\mu \mu_0 \sigma L_z \left[v_y \frac{1}{A_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} + v_x \frac{1}{A_z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right] \varphi \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим первые два уравнения системы (32) и (33). Оценим второй член этих уравнений: им можно пренебречь:

$$\left| \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right| \ll \left| L_z^2 \mu \mu_0 \sigma A_x \right|, \quad \left| \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right| \ll \left| L_z^2 \mu \mu_0 \sigma A_y \right|.$$

Если пренебречь вторым членом в (32) и (33), то оба уравнения будут иметь одинаковую структуру, независимую от (x, y) . Предположим пропорциональность A_x и A_y , и определим условия для этого. Рассмотрев уравнение (34) и заметим, что от переменной z зависят множители $\frac{1}{A_z} \frac{\partial A_x}{\partial z}$ и $\frac{1}{A_z} \frac{\partial A_y}{\partial z}$ в левой части уравнения и их линейная комбинация справа. В то же время, прочие члены зависят лишь от (x, y) . В этом случае, множители эти могут быть лишь константами:

$$\frac{1}{A_z} \frac{\partial A_x}{\partial z} = \alpha_x, \quad \frac{1}{A_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} = \alpha_y. \quad (35)$$

Наша система разбивается на систему уравнений, зависящих от z , и одного уравнения, зависящего от (x, y) . Константы α_x, α_y пока не известны. Для нахождения констант нам потребуются дополнительно еще 2 граничных условия. Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) A_z = -\mu \mu_0 \sigma L_z v_z \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \alpha_x A_z, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \alpha_y A_z, \quad (37)$$

$$-\frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha_x - \frac{L_z}{L_{xy}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha_y + \frac{L_z^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{c^2}{\omega} \mu \mu_0 \sigma\right) \varphi = -\mu \mu_0 \sigma L_z [v_y \alpha_y + v_x \alpha_x] \varphi. \quad (38)$$

В качестве граничных условий относительно φ на правой и верхней стенках возьмем постоянное поле, на левой и нижней – условие симметрии:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad x = 1 : \quad \varphi = (1, 0) = 1 + i \cdot 0, \\ y = 0 : \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \quad y = 1 : \quad \varphi = (1, 0) = 1 + i \cdot 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Для поля A_z граничные условия возьмем так, чтобы на внутренней стороне пластины $z = 0$ по компонентам A_x, A_y была симметрия, и чтобы выполнялись соотношения на внешней поверхности пластины, связывающие это поле с компонентами комплексной амплитуды $\vec{E}_1$ извне защитной пластины:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_y}{\partial z} &= 0 \Rightarrow A_z = 0; \\ z = 1 : \quad A_x &= (E_x, 0), \quad A_y = (E_y, 0) \Rightarrow \int_0^1 A_z dz = \left(\frac{E_{1x}}{\alpha_x}, 0\right) = \left(\frac{E_{1y}}{\alpha_y}, 0\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Без ограничения общности, можно таким образом полагать константы α_x, α_y пропорциональными заданным компонентам комплексной амплитуды электрической напряженности так, чтобы решение для компонент A_x, A_y было однозначным.

Теперь рассмотрим уравнение теплопроводности (23). Рассматривая уравнение (23) в безразмерных переменных (x, y, z) получим, что часть членов имеет порядок $(L_z/L_{xy})^2$, и ими также можно пренебречь. Тем самым, уравнение в случае постоянной теплопроводности можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho A_s L_z^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q(x, y, z)}{\rho A_s}, \quad (41)$$

и решать независимо для каждого (x, y) . В качестве начальных условий задаем постоянное значение температуры пластины T_0 , в качестве граничных – равенство нулю теплового потока на внутренней стороне пластины, и условие излучения на внешней:

$$z = 0 : \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad z = 1 : -\frac{\lambda}{L_z} \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma_B T^4. \quad (42)$$

Алгоритм решения

По всей области пластины строим равномерную сетку. Вдоль оси Oz решение в общем случае очень резко меняется, поэтому сетка будет мелкая, количество точек будет порядка 10000. По плоскости пластины решение меняется слабо, поэтому для нужной точности достаточно 100x100 точек. Для одномерных уравнений относительно A_z и T будем использовать стандартный трехточечный шаблон. После дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной комплексной матрицей, решать которую будем методом прогонки. Для решения двумерной системы будем использовать точечный угловой шаблон. Разрешение системы в этом случае ведется маршевым методом, начиная с правого верхнего края, где на границе области функция задана, затем последовательно находим значения функции на всех точках сетки. В последней точке должно выполняться граничное условие $\partial\varphi/\partial n = 0$. Если это не так, проводится поправка коэффициентов α_x, α_y так, чтобы добиться за несколько итераций выполнения решения с приемлемой точностью.

Результаты

Результаты для комплексных амплитуд электромагнитного поля были получены при следующих остававшихся постоянными параметрах:

$$L_z = 0.001 \text{ м}, L_{xy} = 0.1 \text{ м}, \omega = 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \mu = 100, \sigma = 10^7 \text{ См},$$

$$E_{x1} = 110 \text{ В/м}, E_{y1} = 110 \text{ В/м}.$$

Скорость источника поля варьировалась так, что

$$v_x = v_y = 0; 4000 \text{ м/с}, v_z = 3000; -3000 \text{ м/с}.$$

На рис. 2 изображены модули комплексных амплитуд, полученных при приближении источника поля к пластине. Компоненты скорости вдоль пластины равнялись 4000 м/с.

Заметим, что на графике распределения множителя $|\varphi|(x, y)$, функция максимальна на правой и верхней границе, и минимальна в нижнем левом углу. Это полностью объясняется поставленными граничными условиями. Из последнего графика можно увидеть, что компонента $|E_z|$ проникает внутрь пластины значительно сильнее чем прочие компоненты. Тем не менее, поле в основном распределено в тонком скин-слое, занимающем не более 1% от толщины пластины, что можно объяснить высокой частотой поля, а также высоким значением произведения проводимости на магнитную проницаемость.

На рис. 3 изображены комплексные амплитуды, полученные с теми же исходными данными, но при удалении источника поля от пластины.

Из этих графиков видно, что при удалении проводника от источника электромагнитного излучения $v_z < 0$ поля $|E_x|$, $|E_y|$ проникают в пластину сильнее, чем при его приближении. Поле $|E_z|$ проникает практически одинаково, из чего можно сделать вывод, что проникновение этой компоненты обусловлено прежде всего компонентами скорости источника, направленными перпендикулярно этой компоненте поля, то есть v_x, v_y . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда источник удаляется, тем не менее эти компоненты скорости равны нулю.

На рис. 4 изображены эти результаты (только множитель и компонента $|E_z|$).

Как видно из второго графика амплитуда $|E_z|$, во-первых, на 7 порядков меньше, чем на рис. 2 и 3, а во-вторых, практически не проникает в проводник. Тем самым,

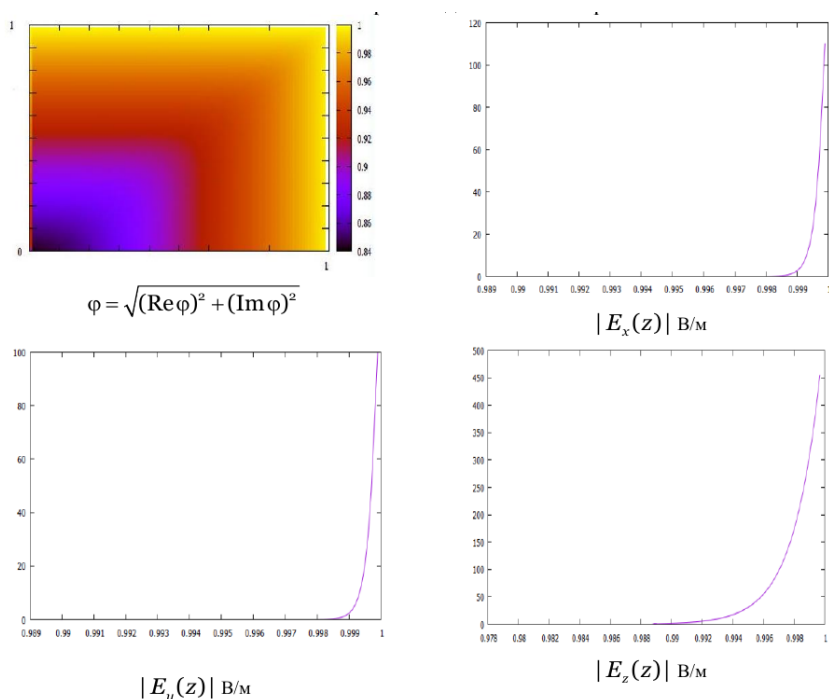


Рис. 2. Распределение модулей комплексных амплитуд напряженности электрического поля: множителя $|\varphi|$, зависящего от координат вдоль пластины, и компонент, зависящих от координаты толщины пластины z . Результат получен при $v_x = v_y = 4000$ м/с, $v_z = 3000$ м/с.

основным источником возникновения в проводнике амплитуды электрического поля, нормальной к поверхности, должны быть компоненты движения относительно источника поля в направлении, касательном к поверхности пластины.

Далее рассмотрим результаты для динамики распределения тепла. Исходные данные для тепловой задачи были следующими:

$$\rho_s = 5000 \text{ кг/м}^3, c_s = 500 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{м)}, \lambda = 40; 200 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

Тем самым, плотность и теплоемкость материала оставались постоянными, а теплопроводность варьировалась. Что касается параметров электромагнитного поля, были выбраны те, для которых источник поля удалялся от пластины, а касательные к поверхности пластины компоненты скорости также были ненулевыми. Это случай, результаты которого изображены на рис. 3.

На рис. 5 изображено распределение тепла Джоуля: слева – на внешней поверхности пластины, справа – по глубине в точке, соответствующей координатам $x = 1, y = 0.5$.

Из рис. 5 видно, что объемное выделение тепла Джоуля достаточно интенсивно,

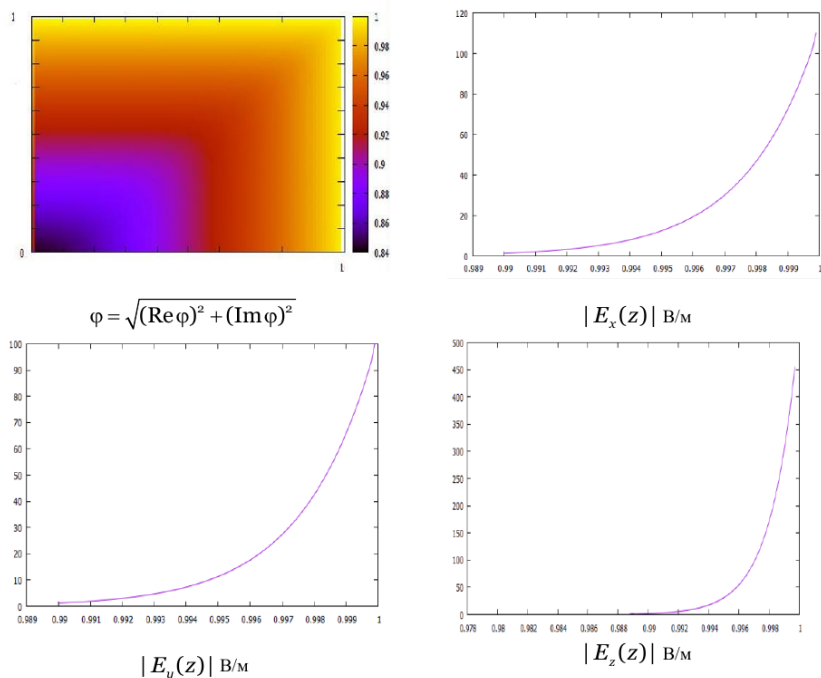


Рис. 3. Распределение модулей комплексных амплитуд напряженности электрического поля: множителя $|\varphi|$, зависящего от координат вдоль пластины, и компонент, зависящих от координаты толщины пластины z . Результат получен при $v_x = v_y = 4000$ м/с, $v_z = -3000$ м/с.

хотя почти все оно сосредоточено в узком скин-слое на поверхности пластины, занимающем менее 0.1% от ее толщины.

Проиллюстрируем теперь графики распределения температур через $t=1$ с, $t=10$ с, $t=20$ с по поверхности пластины и в заданной точке по глубине. Расчеты показали, что за счет излучения с поверхности пластины примерно через 20 с температура стабилизируется.

Из рис. 6 видно, что несмотря на то, что тепло выделяется в узком скин-слое, тонкая пластина успевает достаточно сильно прогреться по всей толщине. Наиболее сильный нагрев поверхности – там, где амплитуда поля наибольшая.

Ниже на рис. 7 изображены аналогичные результаты для пластины с высокой теплопроводностью $\lambda = 200$ Вт/(м·К).

Заметим, что с увеличением коэффициента теплопроводности перепады температуры уменьшаются. За счет больших величин тепла Джоуля, температура, стабилизирующаяся в пластине, достаточно высокая, и она может расплавить или повредить пластину. Чтобы этого не происходило, нам нужно либо снизить тепло Джоуля (которое

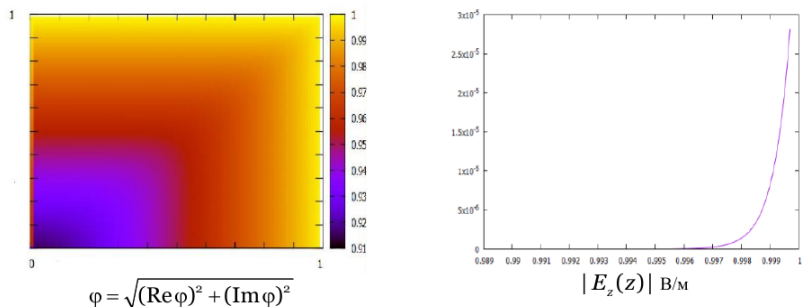


Рис. 4. Распределение модулей комплексных амплитуд напряженности электрического поля: множителя $|\varphi|$, зависящего от координат вдоль пластины, и компонента, зависящих от координаты толщины пластины z . Результат получен при $v_x = v_y = 0$, $v_z = -3000$ м/с.

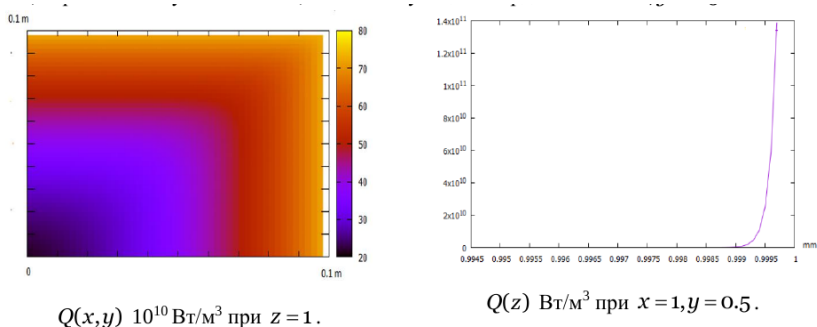


Рис. 5. Значение тепла Джоуля (осредненного по периоду осцилляции) на поверхности пластины и его распределение по глубине пластины в одной из точек.

в большинстве своем зависит от проводимости и магнитной проницаемости пластины), либо увеличить плотность и удельную теплоемкость материала пластины.

Заключение

В данной работе была смоделирована и решена трехмерная задача электромагнитного и теплового воздействия на тонкую металлическую пластину. Были вычислены значения комплексных амплитуд и температуры в пластине. Для использованных в работе параметров получены следующие выводы относительно защитных свойств тонкой пластины.

Скорость источника поля относительно защищаемого объекта оказывает очень сильное влияние на глубину проникновения поля в защитный проводник и, соответственно, на его внутренний разогрев. Если объект движется навстречу источнику поля с космической скоростью, то скин-слой, куда проникает поле, очень тонкий. Напротив, если объект удаляется от источника, глубина проникновения поля становится велика.

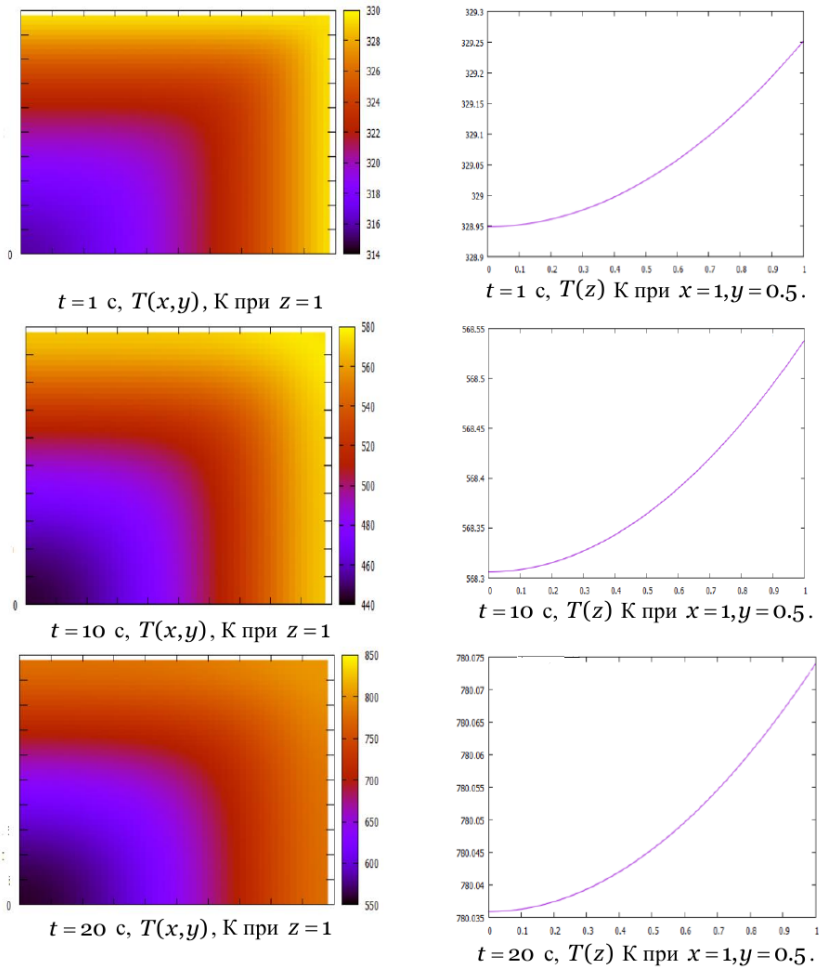


Рис. 6. Динамика распределения температуры на поверхности пластины (слева) и по глубине (справа) при значении теплопроводности $\lambda = 40 \text{ Вт/(м·К)}$.

Поперечный осциллирующий ток в защитной пластине возбуждается за счет компоненты скорости, касательной к плоскости этой пластины, его влиянием на выделение тепла Джоуля пренебрегать нельзя, поскольку в ряде случаев он может быть даже сильнее тока, возбуждающегося вдоль пластины. По касательной к плоскости этой пластины изменение электромагнитного поля незначительное. Однако все равно тепло Джоуля распределяется неравномерно по пластине и, следовательно, неравномерна и

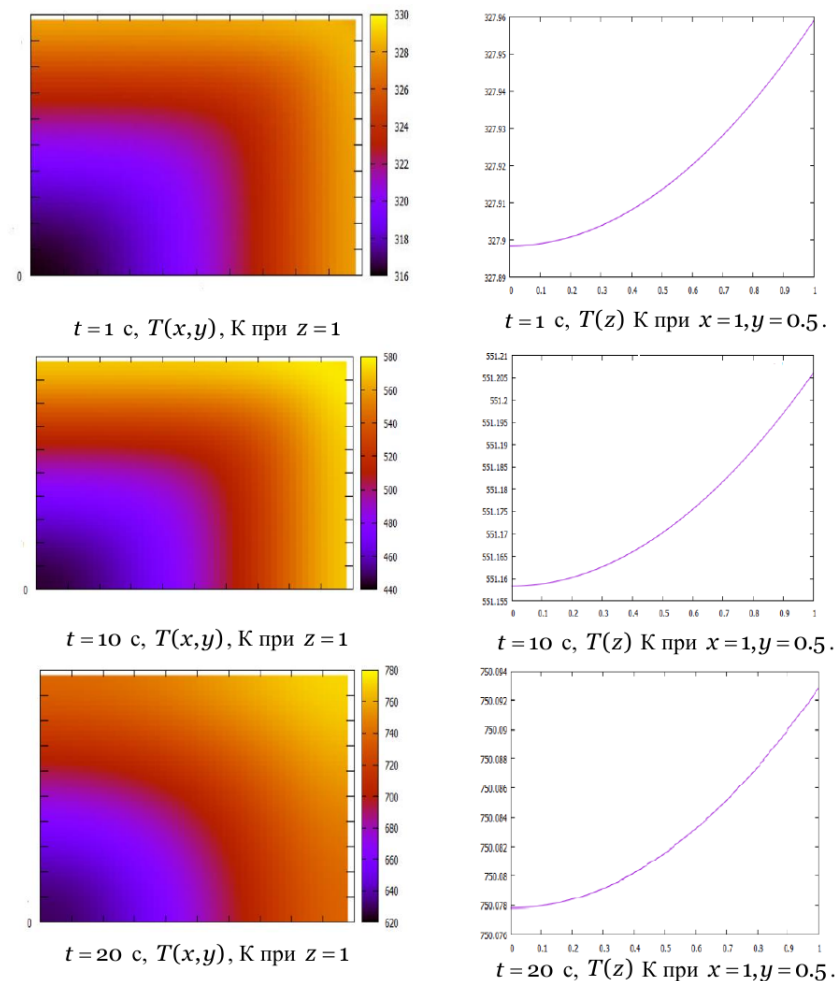


Рис. 7. Динамика распределения температуры на поверхности пластины (слева) и по глубине (справа) при значении теплопроводности $\lambda = 200 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

температура.

Для достаточно тонкой пластины из материала с металлической теплопроводностью, при наличии излучения снаружи профиль температуры устанавливается, для выбранных параметров, примерно за 20 секунд, и дальнейший, благодаря теплопроводности, процесс стабилизируется, сколько бы поле не воздействовало. Температуры, поднима-

ющиеся в проводнике при данных параметрах, достаточно высокие, поэтому нужно подобрать такой материал, который выдерживает такие температуры.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-37-20008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н., Смирнова М.Н., Тюренкова В.В. Защита объектов микроэлектроники от электромагнитного СВЧ-излучения. Вопросы оборонной техники. 2015, серия 16, № 1-2.
2. Соловьянова И.П., Наймушин М.П. Теория волновых процессов. Электромагнитные волны: учебное пособие. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.). - М.: Наука, 1977.
4. Березин С. Б., Пасконов В. М., Сахарных Н. А. Моделирование трехмерных течений методом расщепления с использованием параллельной архитектуры gpi. Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2012. т. 13. с. 75–81.
5. Andreas Kirsch and Frank Hettlich. The Mathematical Theory of Maxwell's Equations. Department of Mathematics, Karlsruhe Institute of Technology (KIT) Karlsruhe, Germany May 24, 2014.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ХИМИЧЕСКОГО РЕАГЕНТА ДЛЯ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ПРОСАЧИВАНИЯ НЕФТИ

Скрылева Е. И.^{1,2,*}, Никитин В. Ф.^{1,2}, Смирнов Н. Н.^{1,2}, Душин В. Р.²

¹ *Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва*

² *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва*
* *jennynne@yandex.ru*

Разработана математическая модель, описывающая неустойчивое вытеснение углеводорода из пористого пласта с учётом химического воздействия на пористый скелет. Подразумевается, что вытесняющая жидкость содержит в себе реагент, растворяющий известняковый скелет, в результате чего увеличивается пористость среды и связанная с ней соотношением Кармана-Козени проницаемость. Модель основана на законе Дарси с учётом капиллярных эффектов. Вязкость нефти уменьшается в процессе вытеснения в связи с тепловыми эффектами, вызванными экзотермической химической реакцией.

Ключевые слова: химическое воздействие на пористый скелет, коэффициент вытеснения нефти, фильтрация, неустойчивость вытеснения вязких жидкостей, пористая среда.

MODELING THE USE OF CHEMICAL REAGENT FOR INTENSIFICATION OF OIL EXTRACTION

Skryleva E. I.^{1,2,*}, Nikitin V. F.^{1,2}, Smirnov N. N.^{1,2}, Dushin V. R.²

¹ *Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow*

² Moscow M. V. Lomonosov State University, Moscow
* jennynne@yandex.ru

A mathematical model describing the unstable displacement of hydrocarbons from a porous formation, taking into account the chemical effects on the porous skeleton has been developed. It is implied that the displacing fluid contains a reagent that dissolves the limestone skeleton, because of which the porosity of the medium and the related Karman-Kozeny ratio permeability increase. The model is based on the Darcy law with taking into account capillary effects. The viscosity of oil decreases during the process of displacement due to the thermal effects caused by the exothermic chemical reaction.

Keywords: chemical effect on the porous skeleton, oil recovery coefficient, seepage, instability of viscous liquid displacement, porous medium.

Введение

Фильтрационные течения вязких жидкостей в пористых средах являются определяющими в процессах добычи жидких полезных ископаемых. Повышение нефтеотдачи нефтеносных пластов связано с качеством вытеснения нефти, насыщающей подземные резервуары, с помощью воды или мицеллярно-полимерных растворов [1–6]. Существует множество методов увеличения коэффициента извлечения нефти [7–9]. Для повышения эффективности вытеснения углеводородов применяются, в том числе, химические методы: во-первых, это внутрипластовое горение, приводящее к повышению температуры и уменьшению вязкости вытесняемого углеводорода, а во-вторых, это добавление в вытесняющую жидкость реагента, растворяющего частично пористый известняковый скелет, таким образом, увеличивая пористость и проницаемость. Известно, что вытеснение более вязкой жидкости менее вязкой из пористой среды является неустойчивым процессом [5–6]. Возникающая неустойчивость приводит к нарушению формы поверхности раздела фаз и переходу от фронтального вытеснения к прорыву отдельных языков вытесняющей жидкости и захвату вытесняемой внутри пористой среды. Эти эффекты существенно снижают качество вытеснения. Цель данной работы - исследование влияния химических взаимодействий вытесняющей жидкости и пористого скелета на особенности вытеснения вязких жидкостей из пористой среды. В работе описана математическая модель, основанная на идее растворения известнякового скелета за счёт реагента, содержащегося в вытесняющей фазе и одновременного уменьшения вязкости нефти за счет экзотермической реакции.

Математическая модель

Рассматривается двухфазная система флюидов в пористом скелете. Фазы флюида - нефть и вода; вода представляет собой в общем случае раствор химического реагента и продуктов реакции в воде. Химическая реакция идет между скелетом и реагентом; часть скелета способна реагировать, часть нейтральна. Реакция выглядит как растворение, поскольку продукты реакции переходят в водную фазу; она экзотермична, и за счет подъема температуры вязкость нефти уменьшается, что также вносит вклад в ее просачивание.

Предполагаются следующие допущения. Истинные плотности всех компонент постоянны (жидкости малосжимаемы), хотя при химической реакции возможно уплотнение либо разуплотнение среды. Вязкости всех жидкостей, кроме нефти, постоянны; вязкость нефти зависит от температуры флюида. В общем случае модель двухтемпературная, хотя при тесном контакте твердой и жидкой фазы обе температуры успевают весьма быстро сравняться, и в этом случае рассматривается однотемпературный вариант. Химическая реакция при температуре выше критической протекает значительно

быстрее динамических процессов в среде; при температуре ниже критической – не протекает вообще. Оценка зависимости проницаемости от пористости ведется на основе формулы Кармана – Козени.

Кинетическая модель. Доли твердой фазы, зависимость проницаемости от пористости

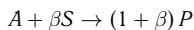
Часть (объемная доля) α_s твердой фазы способна к растворению (реакции). Она может расходоваться от значения α_{s0} до нуля, переходя в фазу флюида; тем самым пористость среды увеличивается. Обозначим пористость среды φ , ее начальное состояние φ_0 , тогда зависимость $\varphi(\alpha_s)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{1 - \varphi}{1 - \varphi_0} = \frac{1 - \alpha_s}{1 - \alpha_{s0}}; \quad 0 \leq \alpha_s \leq \alpha_{s0}; \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \alpha_{s0}(1 - \varphi_0) \quad (1)$$

Если обратить выражение (1), получится зависимость $\alpha_s(\varphi)$; это делать допустимо из-за однозначности $\varphi(\alpha_s)$:

$$\alpha_s = 1 - (1 - \alpha_{s0}) \frac{1 - \varphi}{1 - \varphi_0} \quad (2)$$

Реакцию в терминах реагирующих масс скелета (S), реагирующего агента (A) и продуктов реакции (P) можно записать следующим образом:



что значит: на единицу массы агента приходится β массы растворенного скелета, отчего получается $1 + \nu$ массы продуктов реакции. На тепловыделение расходуется химический потенциал агента; прочие химические потенциалы для простоты описания приравниваются к нулю. Реакция необратима.

Интенсивность расхода массы агента в химической реакции J очевидно должна быть пропорциональна поверхности взаимодействия агента с реагирующей частью скелета, что в свою очередь пропорционально объемной доле агента в пористой среде, умноженной на объемную долю реагирующей части скелета. Коэффициент пропорциональности зависит от температуры флюида. Это дает следующую модель:

$$J = J_f(T) \cdot (Y_a \rho s_w \varphi) \cdot (\alpha_s (1 - \varphi))$$

Здесь s_w - водонасыщенность, а $Y_a \rho$ - масса реагента в водной фазе (ρ - плотность водной фазы, а Y_a - массовая доля реагента. После подстановки (1) в это соотношение можно сократить число значащих переменных, исключив φ , но для компактности лучше оставить обе переменные, заменив пористость как независимую переменную соответствующей алгебраической зависимостью (или наоборот). Кроме этого, уточним зависимость коэффициента пропорциональности от температуры:

$$J = J_f(T) Y_a \rho s_w \varphi \alpha_s (1 - \varphi(\alpha_s)); \quad J_f = \begin{cases} A \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right), & T \geq T_m \\ 0, & T < T_m \end{cases} \quad (3)$$

Физический смысл J - изменение массы активного агента за счет химической реакции в единице объема пористой среды в единицу времени.

Изменение пористости за счет растворения скелета должно вести к изменению абсолютной проницаемости среды K . Для оценки этого изменения привлечем модель Кармана-Козени [2]; она хоть и не совсем адекватно описывает полную зависимость

пористости от проницаемости для многих видов упаковок частиц и канальных систем, но тем не менее из нее можно «вытащить» вполне адекватную зависимость на небольшом интервале изменения параметров. Зависимость такова:

$$\frac{K}{K_0} = \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^3 \cdot \left(\frac{1 - \varphi_0}{1 - \varphi} \right)^2 \quad (4)$$

где K_0 - начальное значение проницаемости. Поскольку имеем алгебраическую зависимость $\varphi(\alpha_s)$ (1), то и зависимость (4) фактически является алгебраической зависимостью $K = K(\alpha_s)$.

Уравнения баланса массы

Баланс массы фазы скелета можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \varphi)) = -\beta J \quad (5)$$

Где ρ_s - истинная плотность материала скелета; t - время.

Баланс массы водной фазы записывается в виде уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s_w \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_w s_w \varphi u_{wj}) = \beta J \quad (6)$$

где ρ_w - истинная плотность всей водной фазы, которая зависит от массовых долей активного агента и продуктов реакции (об этом позже); x_j - пространственные координаты (декартовы), u_{wj} - компонента j истинной скорости водной фазы.

Баланс массы нефтяной фазы записывается в виде уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o s_o \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_o s_o \varphi u_{oj}) = 0 \quad (7)$$

где ρ_o - истинная плотность нефти, s_o - нефтенасыщенность, u_{oj} - компонента j истинной скорости просачивания нефти. Заметим, что по определению насыщенностей и условию того, что имеются лишь две фазы флюида, можно записать

$$s_0 = 1 - s_w = 1 - s; \quad s = s_w \quad (8)$$

Баланс массы активного химического агента записывается в виде уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w Y_a s_w \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_w Y_a s_w \varphi u_{wj}) = -J \quad (9)$$

Где Y_a - массовая доля активного агента.

Баланс массы продуктов реакции записывается в виде уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w Y_p s_w \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_w Y_p s_w \varphi u_{wj}) = (1 + \beta) J \quad (10)$$

где Y_p - массовая доля продуктов реакции.

Плотность водной фазы зависит в общем случае нелинейно от массовых долей Y_a , Y_p , в частности потому, что продуктом реакции может быть растворенный в воде под большим давлением углекислый газ. Представим ее в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_w} = \frac{Y_a}{\rho_a} + \frac{1 - Y_a}{\rho_o} V_w(Y_p) \quad (11)$$

считая, что удельный объем линейно зависит от массовой доли исходного реагента, но нелинейно - от массовой доли продуктов; здесь $V_w(Y_p)$ - заданная зависимость удельного объема водной фазы от доли растворенных в ней продуктов реакции.

Обозначим F_{wj} - поток массы водной фазы, F_{oj} - поток массы нефтяной фазы (компоненты j этих потоков), а также суммарный поток флюида F_j (сумма потоков масс). Определим их как

$$\begin{cases} F_{wj} = \varphi \rho_s u_{wj} \\ F_{oj} = \varphi \rho_o (1-s) u_{oj} \\ F_j = F_{wj} + F_{oj} \end{cases} \quad (12)$$

Далее, уравнения баланса массы агента (9) и продуктов реакции (10) можно упростить посредством уравнения баланса массы водной фазы (6); сразу подставим туда определение массового потока водной фазы:

$$\rho_w s \varphi \frac{\partial Y_a}{\partial t} + F_{wj} \frac{\partial Y_a}{\partial x_j} = -Y_a \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi) + \frac{\partial F_{wj}}{\partial x_j} \right) - J = -(1 + Y_a \beta) J \quad (13)$$

$$\rho_w s \varphi \frac{\partial Y_p}{\partial t} + F_{wj} \frac{\partial Y_p}{\partial x_j} = -Y_p \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi) + \frac{\partial F_{wj}}{\partial x_j} \right) + (1 + \beta) J = (1 + \beta (1 - Y_p)) J \quad (14)$$

Уравнения баланса водной (6) и нефтяной (7) фаз в терминах массовых потоков перепишутся:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi) + \frac{\partial F_{wj}}{\partial x_j} = \beta J \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (1-s) \varphi) + \frac{\partial F_{oj}}{\partial x_j} = 0 \quad (16)$$

Заметим, что последнее уравнение можно считать избыточным, поскольку оно должно согласовываться с условием нормировки насыщенностей. Но для дальнейшего использования нам понадобится сумма уравнений (15) и (16), представляющая собой баланс массы всего флюида (суммы фаз):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (F_{wj} + F_{oj}) = \beta J \quad (17)$$

где плотность флюида рассчитывается на основе зависимости (11) как

$$\rho_f = \rho_w (Y_a, Y_p) s + \rho_o (1-s) \quad (18)$$

Динамическая модель просачивания

Используем модель Дарси с относительными проницаемостями, так что скорости просачивания фаз в терминах потоков массы будут зависеть от их мобильностей и градиента давления в межпоровом пространстве:

$$F_{wj} = -\rho_w \frac{K k_w}{\mu_w} \frac{\partial p}{\partial x_j}; \quad F_{oj} = -\rho_o \frac{K k_o}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (19)$$

Здесь p - давление в межпоровом пространстве, $k_w(s)$ - относительная проницаемость водной фазы, а $k_o(s)$ - нефтяной. Динамические вязкости водной и нефтяной фаз μ_w и μ_o соответственно; последнюю считаем зависящей от температуры. Мобильностями

фаз назовем коэффициенты перед градиентом давления в формулах (19), обозначим их M_w и M_o ; для них получим выражения:

$$M_w = \frac{Kk_w(s)}{\nu_w}, \quad M_o = \frac{Kk_o(s)}{\nu_o(T)} \quad (20)$$

где ν_w, ν_o - кинематические вязкости фаз. Суммируя уравнения (19), получим модель для суммарного потока фильтрации; коэффициент в соответствующем законе равен суммарной мобильности M :

$$F_j = -M \frac{\partial p}{\partial x_j}; \quad M = M_w + M_o \quad (21)$$

Из моделей просачивания (19) и (21) следует, что потоки массы фаз удобно выразить через суммарный поток массы флюида и долю мобильности соответствующей фазы; последняя зависит лишь от насыщенности и температуры, и не зависит от абсолютной проницаемости:

$$F_{wj} = f(s, T) F_j, \quad F_{oj} = (1 - f(s, T)) F_j, \quad f(s, T) = \frac{M_w(s)}{M_w(s) + M_o(s, T)} \quad (22)$$

Зависимость $f(s, T)$ (доля мобильности водной фазы) называется также функцией Леверетта.

Относительные проницаемости фаз зависят от водонасыщенности как монотонные функции в общем случае. В модели Брукса - Кори они выражаются через приведенную водонасыщенность S .

$$k_w(s) = k_w^0 S^{n_w}, \quad k_o(s) = k_o^0 (1 - S)^{n_o}, \quad S = \frac{s - s_w^r}{1 - s_w^r - s_o^r} \quad (23)$$

В модели (23) k_w^0, k_o^0 - положительные константы, меньшие 1; n_w, n_o - положительные степени большие 1; s_w^r, s_o^r - остаточные насыщенности фаз. В общем случае последние могут зависеть от температуры и пористости.

Тепловой баланс

С учетом пренебрежения потоками кинетической энергии по сравнению с тепловой, и с учетом малости работы сил объемного расширения (жидкости и скелет состоят из несжимаемых материалов) баланс тепловой энергии в скелете и во флюиде может быть записан как:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \varphi) h_s) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_s (1 - \varphi) \frac{\partial T_s}{\partial x_j} \right) - \beta J h_s + A_T (T_f - T_s) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \varphi s h_w + \rho_o \varphi (1 - s) h_o) &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (F_{wj} h_w + F_{oj} h_o) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_f \varphi \frac{\partial T_f}{\partial x_j} \right) + \beta J h_s + A_T (T_s - T_f) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь h_s, h_w, h_o - внутренняя (тепловая и химическая) энергия фаз, включая фазу скелета, в расчете на единицу массы, λ_s, λ_f - теплопроводность материала фаз, T_s, T_f - температура фаз, A_T коэффициент межфазного кондуктивного теплообмена. Считаем

формально, что реакция проходит в фазе флюида, так что межфазный обмен энергией за счет потока массы идет на внутренней энергии скелета. Последний пропорционален площади поверхности скелета, приходящейся на единицу объема пористой среды, и потому как правило велик в большинстве случаев просачивания, так что вместо системы (24) можно использовать условие того, что температуры фаз моментально выравниваются (однотемпературная модель) и сумму уравнений (24). Так что в условиях превалирования кондуктивного теплообмена имеем $T_s = T_f = T$, и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \varphi s h_w + \rho_o \varphi (1-s) h_o + \rho_s (1-\varphi) h_s) + \frac{\partial}{\partial x_j} (F_{wj} h_w + F_{oj} h_o) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (25)$$

где суммарный коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \varphi \lambda_f + (1-\varphi) \lambda_s \quad (26)$$

Внутренняя энергия флюида составлена из энергий его фаз, а последние - из компонент. Только при активном агенте имеем теплоту его образования (химический потенциал); теплоемкости же все считаем постоянными, так что имеем:

$$\begin{cases} h_w = C_{fw} T + h_a Y_a \\ h_o = C_{fo} T \\ h_s = C_s T \end{cases} \quad (27)$$

Здесь h_a - химический потенциал (энтальпия образования при 0 К) агента, C_s - удельная теплоемкость скелета, C_{fo} - удельная теплоемкость нефтяной фазы, C_{fw} - удельная теплоемкость водной фазы. Теплоемкость водной фазы будем считать в общем случае функцией массовых долей Y_a , Y_p , в первом приближении - константой:

$$C_{fw} = Y_a C_{a0} + Y_p C_{p0} + (1 - Y_a - Y_p) C_{w0}$$

Здесь C_{a0} - удельная теплоемкость агента, C_{a0} - удельная теплоемкость продуктов реакции, C_{w0} - удельная теплоемкость воды

Сводка основных уравнений баланса; преобразование в недивергентный вид.

Рассортируем главные дифференциальные уравнения по получаемым результатам. Преобразуем гиперболические уравнения, содержащие производную по времени, в следующий шаблон:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \alpha \psi = \Sigma$$

где ψ - одна из переменных, w_j - ее поток, приведенный к скорости, α - коэффициент при линейном слагаемом, Σ - источник. Часть членов в шаблоне может отсутствовать.

Доли фаз: пористость и насыщенность

Уравнение баланса массы скелета (5) сводится к уравнению относительно пористости φ . Именно ее, а не долю растворимой части удобно держать за основную переменную, так что имеем уравнение для φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\beta}{\rho_s} J \quad (28)$$

Разберем уравнение баланса фазы нефти (16) с учетом определения выражения потока ее массы через поток массы всего флюида (22).

$$-\rho_o \varphi \frac{\partial s}{\partial t} - F_j \frac{\partial f(s, T)}{\partial x_j} = -(1-f) \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - (1-s) \rho_o \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

откуда с учетом (36) имеем уравнение относительно водонасыщенности s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{F_j}{\rho_o \varphi} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} = -\frac{F_j}{\rho_o \varphi} \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{(1-f)}{\rho_o \varphi} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + \frac{(1-s)\beta}{\varphi \rho_s} J \quad (29)$$

Массовые доли компонент водной фазы

Уравнение баланса массы активного агента (13) с учетом (22) перепишется как:

$$\rho_w s \varphi \frac{\partial Y_a}{\partial t} + f F_j \frac{\partial Y_a}{\partial x_j} = -(1 + Y_a \beta) J$$

Или

$$\frac{\partial Y_a}{\partial t} + \frac{f}{\rho_w s \varphi} F_j \frac{\partial Y_a}{\partial x_j} + Y_a \frac{\beta J}{\rho_w s \varphi} = -\frac{J}{\rho_w s \varphi} \quad (30)$$

Уравнение баланса массы продуктов реакции (14) с учетом (22) перепишется как:

$$\rho_w s \varphi \frac{\partial Y_p}{\partial t} + f F_j \frac{\partial Y_p}{\partial x_j} = (1 + \beta(1 - Y_p)) J$$

Или

$$\frac{\partial Y_p}{\partial t} + \frac{f}{\rho_w s \varphi} F_j \frac{\partial Y_p}{\partial x_j} + Y_p \frac{\beta J}{\rho_w s \varphi} = \frac{(1 + \beta) J}{\rho_w s \varphi} \quad (31)$$

Давление и получаемый из него массовый поток флюида

Суммарный баланс массы флюида (17) превращается в уравнение относительно порового давления:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(M \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_f) - \beta J = \varphi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} - \beta \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) J$$

Температура

Преобразуем теперь уравнение (25) однотемпературной модели к недивергентному виду относительно температуры, пользуясь уже наработанными результатами. Вначале преобразуем производную по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi h_w + \rho_o (1-s) \varphi h_o + \rho_s (1-\varphi) h_s) = \\ = h_w \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi) + h_o \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (1-S) \varphi) + h_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1-\varphi)) + \\ + (\rho_w s \varphi C_{fw} + \rho_o (1-s) \varphi C_{fo} + \rho_s (1-\varphi) C_s) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w s \varphi h_a \frac{\partial Y_a}{\partial t} \end{aligned}$$

Воспользовавшись балансом массы водной (6), нефтяной (7) фаз и фазы скелета (5), продолжим преобразования:

$$h_w \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w s \varphi) = -h_w \frac{\partial F_{wj}}{\partial x_j} + h_w \beta J$$

$$h_o \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o (1 - S) \varphi) = -h_o \frac{\partial F_{oj}}{\partial x_j}$$

$$h_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \varphi)) = -h_s \beta J$$

Преобразование конвективного члена уравнения (25) приводит к

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (F_{wj} h_w + F_{oj} h_o) = h_w \frac{\partial F_{wj}}{\partial x_j} + h_o \frac{\partial F_{oj}}{\partial x_j} + f F_j \frac{\partial h_w}{\partial x_j} + (1 - f) F_j \frac{\partial h_o}{\partial x_j}$$

При подстановке всего этого в (25) часть членов сократится; приведем вид этого уравнения после такой подстановки:

$$(\rho C) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w s \varphi h_a \frac{\partial Y_a}{\partial t} + f F_j \frac{\partial h_w}{\partial x_j} + (1 - f) F_j \frac{\partial h_o}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + (h_s - h_w) \beta J$$

где теплоемкость на единицу объема всей пористой среды вычисляется как

$$(\rho C) = \rho_w s \varphi C_{fw} + \rho_o (1 - s) \varphi C_{fo} + \rho_s (1 - \varphi) C_s \quad (32)$$

Остается подставить определения внутренней энергии (27) для водной и нефтяной фаз, после чего воспользоваться уравнением баланса массы агента, преобразованным к недивергентному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{f C_{fw} + (1 - f) C_{fo}}{(\rho C)} F_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + T \frac{f}{(\rho C)} F_j \frac{\partial C_{fw}}{\partial x_j} - \frac{1}{(\rho C)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \\ = \frac{(h_s - h_w) \beta + h_a (Y_a \beta + 1)}{(\rho C)} J \end{aligned} \quad (33)$$

Производная от теплоемкости водной фазы в левой части уравнения (33) имеет место тогда, когда мы считаем ее зависящей от концентрации компонент этой фазы – агента и продуктов реакции.

Расчет кинетической стадии процесса

В силу того, что характерное время кинетического процесса химической реакции может быть на несколько порядков меньше шага по времени, регулируемого скоростью просачивания фаз, кинетические члены в правой части уравнений динамики следует оценивать не по их значению в начале шага, и не по среднему арифметическому от значений в начале и в конце шага, как в схеме Кранка – Николсона: и то, и другое может сильно отклоняться от того, что реально создает изменение переменных задачи. Вместо этого оценку кинетических членов Φ системы

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \Phi_k (X_1, \dots, X_q) + \dots$$

где q - число уравнений, а X_k - переменные (в каждом расчетном узле индивидуально), будем проводить следующим образом. Решаем систему без учета членов, зависящих от пространственных градиентов. Полученное из начального состояния X_k^0 решение X_k^1 за время Δt используем для осреднения Φ_k :

$$\overline{\Phi_k} = \frac{X_k^1 - X_k^0}{\Delta t}$$

Именно это среднее и берется в качестве кинетического источника для переменной X_k при подстановке в общие уравнения.

Выпишем теперь полученную кинетическую систему, раскрыв одновременно содержание скорости реакции J .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\beta}{\rho_s} J_f Y_a \rho_s a_s \varphi (1 - \varphi) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{(1-s)\beta}{\rho_s} J_f Y_a \rho_s a_s (1 - \varphi) \\ \frac{\partial Y_a}{\partial t} &= -J_f Y_a a_s (1 - \varphi) (1 + Y_a \beta) \\ \frac{\partial Y_p}{\partial t} &= J_f Y_a a_s (1 - \varphi) (1 + \beta - Y_p \beta) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{(h_s - h_w) \beta + h_a (Y_a \beta + 1)}{C} J_f Y_a s a_s \varphi (1 - \varphi)\end{aligned}$$

Заключение

В работе представлена математическая модель описывающая вытеснение вязкой жидкости из пористой среды с помощью менее вязкой жидкости с учётом химического воздействия на пористый скелет. Рассмотрены связь пористости с проницаемостью и долей твёрдой фазы способной к растворению, особенности реакции и интенсивности расхода массы агента. Описаны уравнения баланса массы, теплового баланса, динамическая модель просачивания основанная на законе Дарси с учётом капиллярных эффектов на границе фаз и изменения вязкости нефти в результате экзотермической реакции.

На основании данной модели предполагается проведение вычислительных экспериментов с последующей статистической обработкой их результатов для исследования влияния химических взаимодействий между фильтрующимися жидкостями и пористым скелетом на динамику вытеснения, развитие неустойчивости и коэффициент извлечения нефти.

Благодарности

Работы, выполненные в МГУ им. М. В. Ломоносова, были поддержаны грантом РФФИ № 17-08-01032.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. Theory of Fluids Flows through Natural Rocks. Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Acad Publishers, 1990.
2. Kaviany M. Principles of heat transfer in porous media. NY : Dover Publications Inc., 1988.

3. Андерсен М. А., Дункан Б., МакЛин Р. Анализ керна: истина в последней инстанции при оценке характеристик пласта (Core Truth in Formation Evaluation) // Overfield Review. 2013. № 2. С. 25.
4. Гиматулинов Ш. К., Ширковский А. И. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра, 1982.
5. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Тюренкова В. В., Стамов Л. И. Визуализация результатов моделирования неустойчивого вытеснения нефти из пористых сред // Тр. НИИСИ РАН. 2016. Т. 6. № 2.
6. Козлов И. В., Скрылева Е. И. Математическое моделирование и обработка эксперимента по вытеснению нефти водой из неокомских песчаников // Вестн. кибернетики. 2016. № 2. С. 139–146.
7. Вольпин С. Г., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Диева Н. Н. Моделирование импульсно-волновой обработки нефтяных пластов методом термогазохимического воздействия // Сб. науч. тр. ОАО Всерос. нефтегаз. науч.-исслед. ин-т им. акад. А. П. Крылова. 2013. Вып. 149. С. 127–137.
8. Вольпин С. Г., Саитгареев А. Р., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Корнаева Д. А., Диева Н. Н. Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефт. хоз-во. 2014. № 1. С. 62–66.
9. Вольпин С. Г., Смирнов Н. Н., Кравченко М. Н., Диева Н. Н. Оптимизация условий безопасного проведения ТГХВ на нефтяных месторождениях // Эколог. вестн. России. 2014. № 3. С. 17–21.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ С УЧЁТОМ ИНЕРЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Скрылева Е. И., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н.

г. Москва

MICROGRAVITY INVESTIGATION OF SEEPAGE FLOWS IN POROUS MEDIA TAKING INTO ACCOUNT INERTIAL EFFECTS

Skryleva E. I., Nikitin V. F., Smirnov N. N.

Moscow

Процесс течения вязкой жидкости в пористой среде существенно зависит от капиллярных эффектов и неустойчивости, которая может развиваться на границе раздела жидкостей в случае многофазного потока. Учет капиллярных сил имеет решающее значение для описания движения жидкостей в пористых средах. Изучение капиллярных эффектов в обычных условиях затруднено из-за малости пор в натуральных средах. В модельных пористых средах с большими порами, позволяющих проведение визуализации течения, значительное влияние на процесс оказывает сила тяжести. Поэтому в данной работе рассматривается течение жидкостей в модельной пористой среде в условиях микрогравитации во время параболических полетов, при которых капиллярная сила остается единственной движущей силой. При этом особое внимание уделяется исследованию просачивания жидкости под действием капиллярных сил в искусственной пористой среде, содержащей неоднородности.

В работе рассмотрены эксперименты по капиллярной фильтрации жидкости в неоднородной искусственной пористой среде в условиях микрогравитации. Описана математическая модель многофазной фильтрации с учетом инерционных эффектов. Результаты эксперимента сравниваются с результатами численного моделирования течения вязкой жидкости в пористой среде с учетом капиллярных и инерционных эффектов. Показано, что при переходе из более проницаемой среды в менее проницаемую скорость границы раздела фаз возрастает. Это связано с тем, что капиллярные силы в среде с низкой проницаемостью больше. При дальнейшем течении в низкопроницаемой среде скорость впитывания уменьшается гораздо быстрее, чем в высокопроницаемой среде. Также показано, что дисперсия жидкости при ее просачивании в низкопроницаемую среду значительно выше.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-29-15080.

ПОЛИМЕРНОЕ ЗАВОДНЕНИЕ КАК МЕТОД УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ

Мелкумян Л. А., Логвинов О. А.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Подтверждена эффективность полимерного заводнения как метода повышения нефтеотдачи. Был определен оптимальный профиль вязкости прослойки для разных чисел Пекле.

The efficiency of Polymer Flooding as enhanced oil recovery method is confirmed. The optimal viscosity profile of the interlayer has been determined for different Peclet numbers.

Введение

Процессы фронтального вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой жидкостью или газом широко распространены в нефтяной промышленности. Одна из технологий нефтедобычи предполагает вытеснение нефти водой из нефтеносного пористого пласта. Очистка трещины гидроразрыва производится продувкой газа под действием градиента давления. Жидкость, формировавшая гидроразрыв, вытесняется из трещины. Экспериментально [1,2] и теоретически [3, 4] доказано, что данный процесс неустойчив: вытесняющая (менее вязкая) жидкость стремится прорваться сквозь слои вытесняемой (более вязкой), образуя в ней каналы, называемые «вязкими пальцами» (рис. 1) [5].

Основные результаты анализа устойчивости показывают, что уменьшение перепада вязкостей на межфазной границе приводит к существенному снижению темпа роста вязких пальцев [6].

Полимерное заводнение является одним из приоритетных методов повышения нефтеотдачи, наиболее подготовленным технологически и технически [7,8]. Оно заключается в предварительной закачке в пласт дополнительного «агента» – воды с добавлением высокомолекулярных полимерных соединений, наличие которых приводит к заметному увеличению ее вязкости [1]. После «заводнения» в качестве вытесняющей жидкости используется обычная вода. В результате уменьшается перепад вязкости на ведущей межфазной границе, что приводит к повышению нефтеотдачи (см. рис. 2).

Для аналогового моделирования фильтрационного течения в пористой среде используется ячейка Хеле-Шоу – две параллельные пластины, разделенные малым зазором (см. рис. 3). Течения в ячейке Хеле-Шоу легко поддаются визуализации и описываются относительно простыми математическими моделями — уравнением неразрывности и



Рис. 1. Образование «вязких пальцев» в процессе вытеснения водоглицериновой смеси [5].

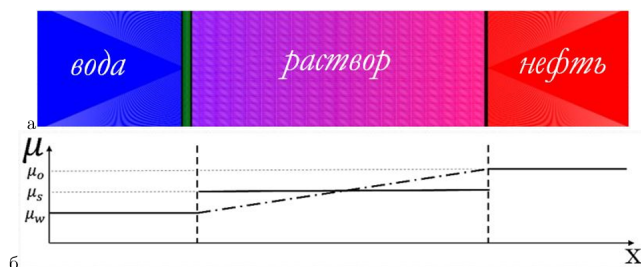


Рис. 2. Полимерное заводнение: а — схема заводнения; б — зависимость вязкости μ от продольной координаты x : μ_w — вязкость воды, μ_s — вязкость раствора, μ_o — вязкость нефти.

аналогом закона Дарси для ячейки. Поэтому ее используют как самую простую двумерную модель пористой среды [5]. Трение о пластины ячейки моделирует тормозящее действие пористого скелета.

Линейный анализ устойчивости совместного вытеснения трех несмешивающихся жидкостей.

Движение жидкостей опишем уравнением неразрывности и аналогом закона Дарси для ячейки Хеле-Шоу [9] (1). На границах раздела фаз ставятся условия равенства нормальных к фронту скоростей и равенства давлений (2). На бесконечности — условие постоянства скорости (3).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2}u, \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{\delta^2}v, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$p_s = p_o, [W_s]_n = [W_o]_n, \text{ при } x = 0 + \xi(y, t),$$

$$p_s = p_o, [W_s]_n = [W_o]_n, \text{ при } x = -L + \eta(y, t), \quad (2)$$

$$u_o = U, v_o = 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

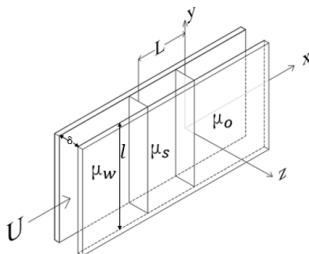


Рис. 3. Схема трехфазного вытеснения из ячейки Хеле-Шоу: U — средняя скорость вытеснения, l — ширина пластин, δ — зазор между пластинами ($\delta \ll l$), L — длина зоны заводнения.

$$u_w = U, u_w = 0, \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad (3)$$

где $W(u, v)$, p — осреднённые по зазору ячейки, δ — вектор скорости и давление.

Уравнения (1) линейны и могут быть записаны для малых возмущений. Исключая компоненты скорости, приходим к уравнению Лапласа для давления и ищем решение в виде нормальных мод

$$p = P(x)e^{\omega t}e^{iky}, \quad (4)$$

где $P(x)$ — неизвестная функция, k — волновое число, ω — декремент затухания, i — мнимая единица.

При подстановке (4) в уравнение Лапласа с учетом граничных условий на бесконечности, получаем:

$$\begin{aligned} p_w &= P_w e^{kx} e^{\omega t} e^{iky}, u_w = -\frac{\delta^2}{12\mu_w} k P_w e^{kx} e^{\omega t} e^{iky}, \\ p_o &= P_o e^{kx} e^{\omega t} e^{iky}, u_o = -\frac{\delta^2}{12\mu_o} k P_o e^{kx} e^{\omega t} e^{iky}, \\ p_s &= (P_{s1} e^{kx} - P_{s2} e^{-kx}) e^{\omega t} e^{iky}, u_s = -\frac{\delta^2}{12\mu_s} k (P_{s1} e^{kx} - P_{s2} e^{-kx}) e^{\omega t} e^{iky}, \end{aligned}$$

где P_w, P_o, P_{s1}, P_{s2} — неизвестные константы.

С учетом граничных условий на межфазных границах и обезразмеривания, уравнения примут вид:

$$\begin{cases} M_s P_w - (P_{s1} - P_{s2} e^{2[k]L}) = 0, \\ \left(\frac{[k]}{[\omega]} + 1\right) P_w = P_{s1} \left(\frac{[k]}{[\omega]} + 1\right) + P_{s2} e^{2[k]L} \left(1 - \frac{[k]}{[\omega]}\right), \\ P_o + M_o (P_{s1} - P_{s2}) = 0, \\ \left(1 - \frac{[k]}{[\omega]}\right) P_o = P_{s1} \left(\frac{[k]}{[\omega]} + 1\right) + P_{s2} \left(1 - \frac{[k]}{[\omega]}\right), \end{cases} \quad (5)$$

где $M_s = \frac{\mu_s}{\mu_w}$, $M_o = \frac{\mu_o}{\mu_s}$ — перепад вязкостей на границах; $[\omega] = \frac{\omega\delta}{U}$, $[k] = \frac{k}{2\pi\delta}$, $[L] = \frac{L}{\delta}$.

Нетривиальное решение системы (5) существует только при условии равенства нулю ее определителя. Оно приводит к дисперсионному соотношению $[\omega] = [\omega]([k], M_{sw}, M_{os}, [L])$, представляющему собой квадратное уравнение для декремента

затухания, где

$$\omega_{\eta} = \frac{[k]e^{2[k][L]}(M_{os}M_{sw}-1)+\sqrt{D/4}}{(M_{sw}-1)(M_{os}-1)-e^{2[k][L]}(M_{sw}+1)(M_{os}+1)},$$

$$\omega_{\xi} = \frac{[k]e^{2[k][L]}(M_{os}M_{sw}-1)-\sqrt{D/4}}{(M_{sw}-1)(M_{os}-1)-e^{2[k][L]}(M_{sw}+1)(M_{os}+1)},$$

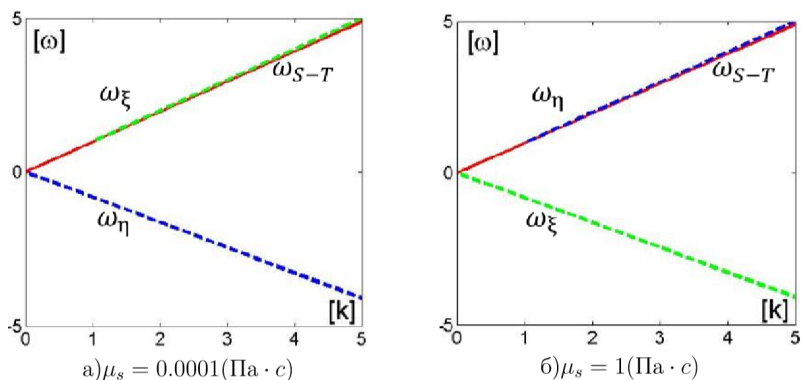
ω_{η} — собственное значение, соответствующее левой межфазой границе, а ω_{ξ} —правой.

При монотонном увеличении вязкости прослойки (рис. 8) скачок на левой границе растёт, а на правой границе уменьшается. Соответственно, темп роста возмущений на левой (правой) границе увеличивается (уменьшается).

Таблица 1

Параметры линейного анализа

Рисунок	$\mu_s(0 \cdot A)$	M_{sw}	M_{os}	Эффективность заводнения
6 а)	0.0001	0.1	1000	-
6 б)	1	1000	0.1	-
7 а)	0.01	10	10	16.5%
7 б)	0.03	30	3.33	45.1%
8 а)	0.005	5	20	7.69%
8 б)	0.007	7	14.3	11.3%

Рис. 4. Зависимость темпа роста возмущений $[\omega]$ от длины волны $[k]$.

Моделирование заводнения пласта методом сквозного счета.

Совместное вытеснение трех смешивающихся жидкостей (воды, полимерного раствора и нефти, рис.2) моделируется методом сквозного счета. Роль раствора играла жидкость переменной вязкости. Движение жидкостей описывается единой системой уравнений Дарси для ячейки Хеле-Шоу (6) — (7) с переменной по пространству динамической вязкостью, зависящей от объемных концентраций α и β : $\alpha = 0$, $\beta = 0$ соответствует вытесняющей жидкости (воды), $\alpha = 1$, $\beta = 0$ — раствору, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ —

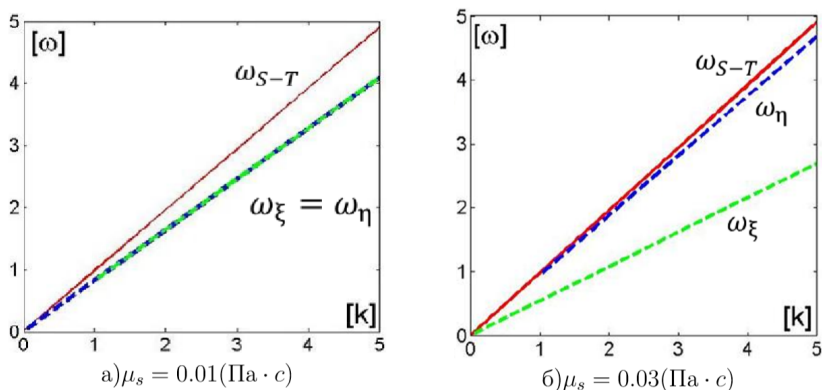


Рис. 5. Зависимость темпа роста возмущений $[\omega]$ от длины волны $[k]$.

вытесняемой (нефти). Для концентраций α и β записывалось уравнение конвективной диффузии (8). Зависимость вязкости от концентрации для жидкостей близкой химической природы считается степенной (9). Таким образом, полная система для численного моделирования принимает следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu(\alpha, \beta)}{\delta^2} u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu(\alpha, \beta)}{\delta^2} v, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= D_\alpha \left[\frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} + u \frac{\partial \beta}{\partial x} + v \frac{\partial \beta}{\partial y} &= D_\beta \left[\frac{\partial \beta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta^2}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mu^{\frac{1}{3}}(\alpha, \beta) = \mu_w^{\frac{1}{3}}(1 - \alpha - \beta) + \mu_s^{\frac{1}{3}}\alpha + \mu_o^{\frac{1}{3}}\beta, \quad (9)$$

где D_α , D_β — коэффициенты самодиффузии раствора и нефти, соответственно.

Расчетная область $\Omega = [0; l_x] \times [0; l_y]$ разбивается на прямоугольные ячейки ($N_x = 400, N_y = 400$) узлами трех типов. В узлах первого типа (оба индекса целые) вычисляются давление и концентрации, в узлах второго типа (первый индекс половинный, второй целый) — компонента скорости по оси Oх, в узлах третьего типа (первый индекс целый, второй половинный) — компонента скорости по оси Oy.

Начальные условия при $t < 0$ область заполнена нефтью и раствором, поле скорости нулевое. При $t = 0$ вода поступает по левой границе при постоянном градиенте давления.

Интегрирование системы (6) — (9) разбивается на несколько этапов:

На первом этапе определяется давление. Компоненты скорости, выраженные из уравнений движения (6) по явным схемам, подставляются в разностный аналог уравнения неразрывности (7). Полученное соотношение для давления разрешается методом

прогонки вдоль оси X . Граничные условия на входе и выходе из области:

$$x = 0 : p = P_{in}, x = l_x : p = P_{out} < P_{in}.$$

На втором этапе из уравнений движения (6) по явным схемам определяются компоненты скорости. Граничные условия на жестких стенках:

$$y = 0 : u = v = 0, y = l_y : u = v = 0.$$

На третьем этапе по явной схеме методом MUSCL с ограничителем потоков V anLeer решаются уравнения конвективной диффузии (8).

На заключительной стадии определяется новое положение границ как линия уровня концентраций $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$. Затем на основе (9) пересчитывается вязкость. На всех этапах используются разностные схемы второго порядка точности. Шаг по времени выбирается согласно критерию Куранта - Фридрихса. Во всех расчетах, кроме тестовых, на ведущей границе задается одинаковое полигармоническое возмущение типа $\cos(1/y)$.

Результаты моделирования.

На рис. 7 – 10 представлены результаты 14 расчетов. Параметры перечислены в Табл. 2. Результаты даны в 2 момента времени. Для расчетов 5 – 14 длина переходной зоны оставалась неизменным параметром: $L = 16\delta$. Эффективность вытеснения Q определяется как количество вытесненной нефти к моменту времени, когда вода достигнет конца расчетной области.

Таблица 2

Параметры расчетов

№ расчета	M	Профиль вязкости раствора	Pe_β	Q	Время вытеснения (с)
1	100	$\emptyset$	∞	0.289	11.4
2	100	μ_1	∞	0.346	23
3	100	μ_2	∞	0.321	15
4	100	μ_3	∞	0.331	16
5	100	μ_1	10^4	0.339	15.7
6	100	μ_2	10^4	0.305	14.3
7	10	μ_3	10^4	0.317	15.8
8	10	$\emptyset$	10^3	0.717	22
9	10	μ_1	10^3	0.739	24
10	10	μ_2	10^3	0.741	24
11	10	μ_3	10^3	0.719	23
12	10	μ_1	10^2	0.720	24
13	10	μ_2	10^2	0.743	24
14	10	μ_3	10^2	0.75	24

Рассматривались различные профили вязкости раствора:

Расчеты 1 – 4 (рис. 7) проведены для несмешивающихся жидкостей ($D_{sw} = 0, D_{wo} = 0$). Отношение вязкости вытесняемой жидкости (нефти) к вязкости воды $M = 100$. На входе задавалось давление $P_{in} = 1.001P_{atm}$. Оптимальный профиль вязкости – μ_1 (рис. 6).

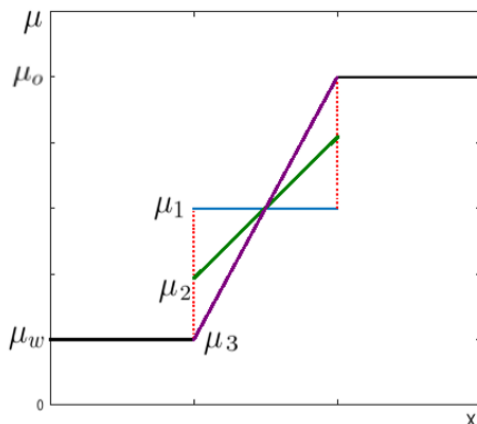


Рис. 6. Профили вязкости раствора

Расчеты 5 — 7 (рис. 8) проведены для смешивающихся жидкостей ($Pe_\beta \sim 10^4, Pe_\alpha \sim 10^7$). Отношение вязкости вытесняемой жидкости (нефти) к вязкости во-ды $M = 100$. На входе подавалось давление $P_{in} = 1.001P_{atm}$. Оптимальный профиль вязкости — μ_1 (рис. 6).

Расчеты 8 — 11 (рис. 9) проведены для смешивающихся жидкостей ($Pe_\beta \sim 10^3, Pe_\alpha \sim 10^7$). Отношение вязкости вытесняемой жидкости (нефти) к вязкости воды $M = 10$. На входе подавалось давление $P_{in} = 1.0002P_{atm}$. Оптимальный профиль вязкости — μ_2 (рис. 6).

Расчеты 12 — 14 (рис. 10) проведены для смешивающихся жидкостей ($Pe_\beta \sim 10^2, Pe_\alpha \sim 10^7$). Отношение вязкости вытесняемой жидкости (нефти) к вязкости воды $M = 10$. На входе подавалось давление $P_{in} = 1.0002P_{atm}$. Оптимальный профиль вязкости — μ_3 (рис. 6).

Заключение

Линейный анализ устойчивости совместного вытеснения трех несмешивающихся жидкостей показал принципиальную эффективность заводнения как метода повышения нефтеотдачи. Темп роста малых возмущений на ведущей границе уменьшается по сравнению с двухфазным вытеснением. Оптимальной является ситуация, при которой отношения вязкостей на обеих границах совпадают.

Результаты численного моделирования для несмешивающихся жидкостей согласуются с выводами линейной теории.

Для смешивающихся жидкостей при больших числах Пекле эффективнее использовать «прослойку» с постоянной вязкостью. При уменьшении числа Пекле оптимальнее оказывается монотонный профиль вязкости. Причем, чем меньше число Пекле, тем «круче» должен быть профиль.

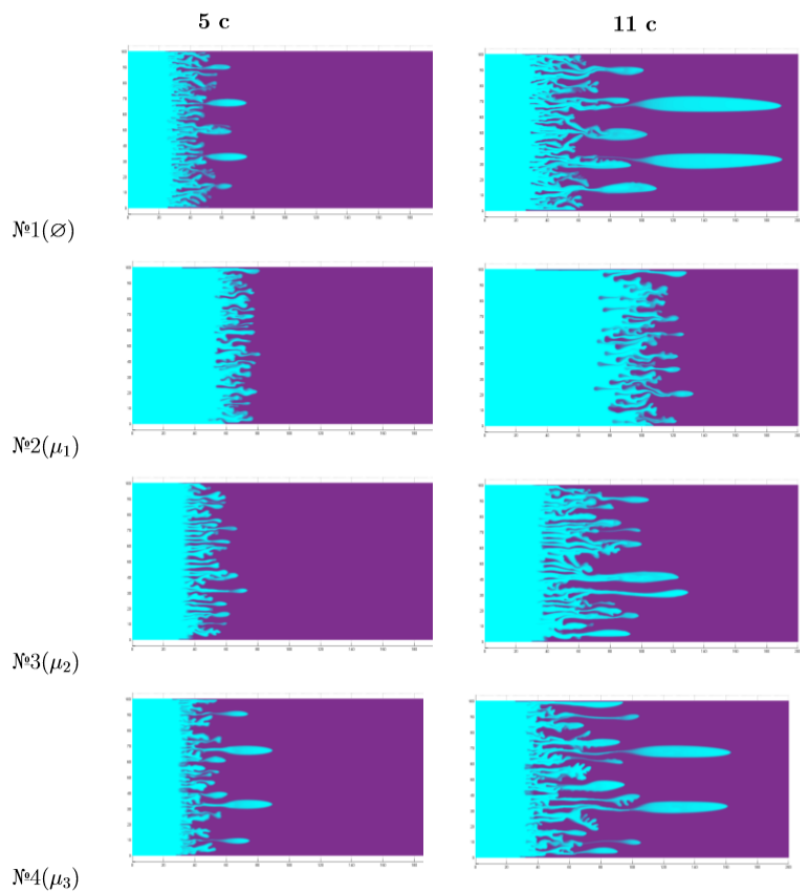


Рис. 7. I серия расчетов

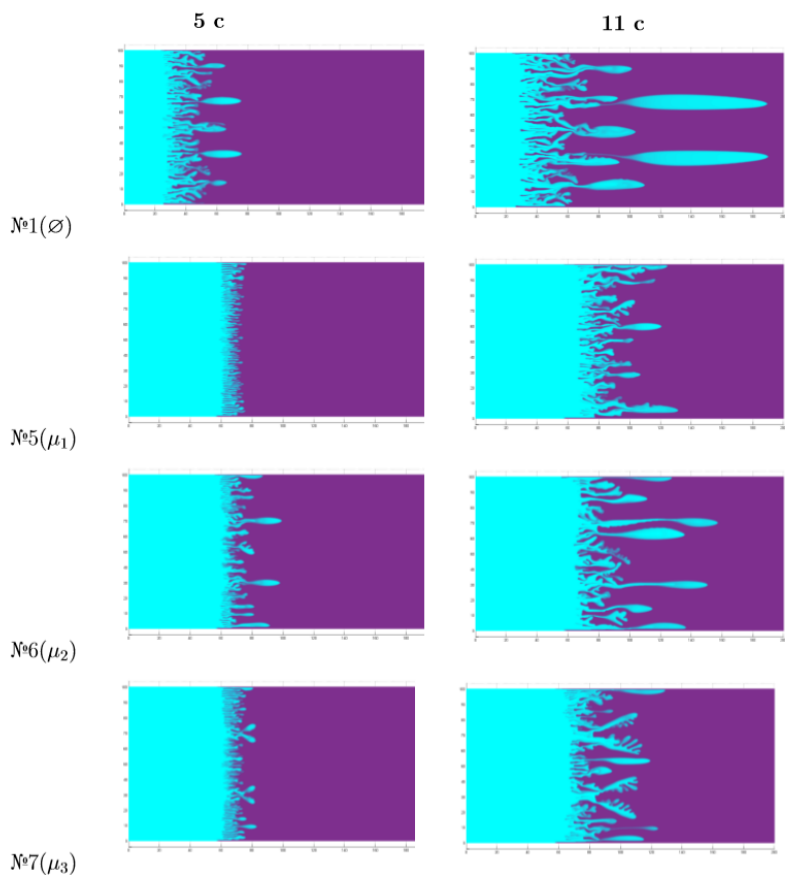


Рис. 8. II серия расчетов

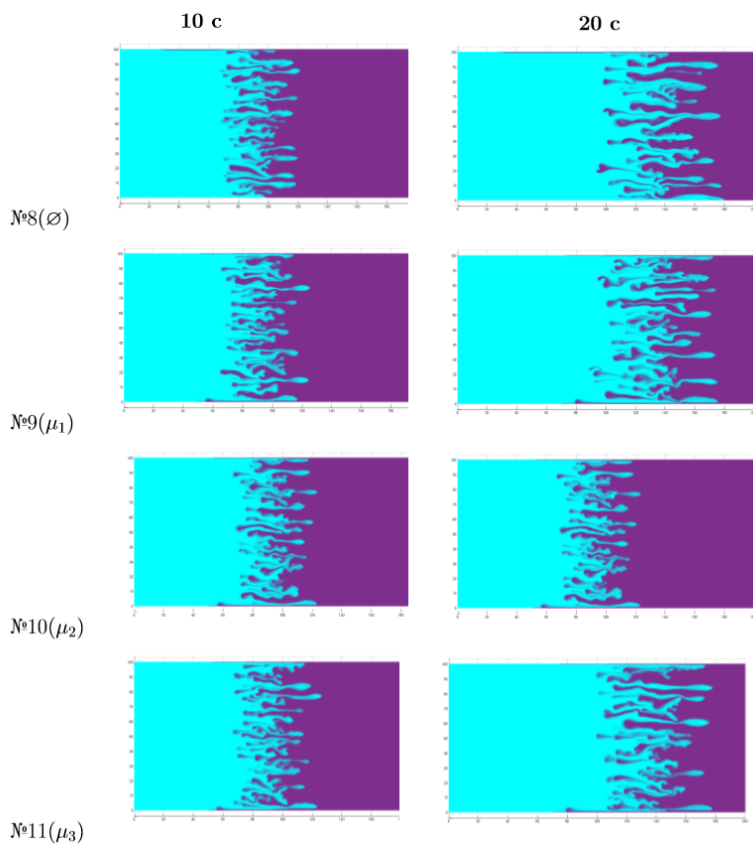


Рис. 9. III серия расчетов

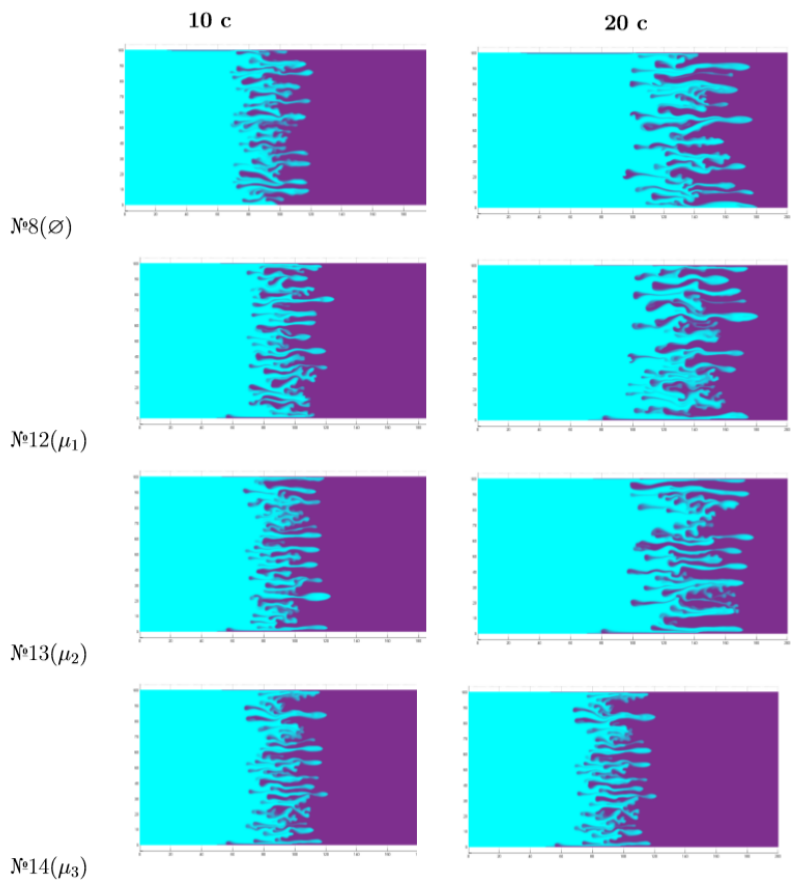


Рис. 10. IV серия расчетов

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Hill, *Channeling in packed columns*, Chem. Eng. Sci., 1952, 1, pp 247–253
2. A. L. Benham, R. W. Olson, *A model study of viscous fingering*, Soc. Pet. Eng., 1963, 3, pp 138–144
3. Chouke R. L., van Meurs P., van der Poel C. *The instability of slow, immiscible, viscous liquid–liquid displacements in permeable media*, Trans. AIME. 1959. 216. 188–194
4. P. G. Saffman, G. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. Roy. Soc. London, 1958. A245. 312–329
5. N.N.Smirnov, V.F.Nikitin, A.Maximenko, M.Thiercelin, J.C.Legros, *Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media*, Phys. Fluids. 2005. 17. 84–102.
6. P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press., 1981.
7. P. Daripa, J. Glimm, B. Lindquist, O. McBryan, *Polymer Floods: A Case Study of Nonlinear Wave Analysis And of Instability Control In Tertiary Oil Recovery*, SIAM J. Appl. Math., 48 (1988), pp. 353–373
8. W. Littman, *Polymer Flooding: Developments in Petroleum Science*, Elsevier, Amsterdam, 1998
9. А. В. Звягин, О. Е. Ивашнев, О. А. Логвинов, *О влиянии малых параметров на структуру фронта неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу*, Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, 2007. №4. 27-37
10. P. Daripa and C. Gin, *Studies on Dispersive Stabilization of Porous Media Flows*. Department of Mathematics, Texas A& M University, College Station, 2016

**ЧИСЛЕННОЕ ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩЕНИЯ
ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В ДВИГАТЕЛЕ**

Михальченко Е. В.* , Никитин В. Ф.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской
академии наук», г. Москва*

** MikhhalchenkoLena@yandex.ru*

**NUMERICAL THREE-DIMENSIONAL SIMULATION ROTATION OF
DETONATION WAVE IN ENGINE**

Mikhhalchenko E. V.* , Nikitin V. F.

*Moscow M. V. Lomonosov State University, Moscow, Russia
Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis of Russian
Academy of Sciences, Moscow, Russia*

** MikhhalchenkoLena@yandex.ru*

Улучшение характеристик современных двигателей, основанных на традиционных схемах (цикл Брайтона) близко к своему технологическому пределу. Создание конкурентоспособных двигателей нового поколения и получение оптимальных показателей, возможно при применении принципиально новых технических решений. Одним

из таких решений является разработка двигательных установок основанных на детонационном сжигании топлива в ударных волнах, со скоростями более чем в 1000 раз превышающими скорости дефлаграционного горения. Существует три основных типа детонационных двигателей: двигатель со стационарной детонационной волной, пульсирующий детонационный двигатель и двигатель с вращающейся детонационной волной. Двигатель с вращающейся детонационной волной - это принципиально новый тип двигателей, способный создавать более высокую тягу, чем традиционные, основанные на процессе дефлаграции горючей смеси. Полномасштабное трехмерное моделирование таких камер сгорания с учетом многокомпонентности смеси, явлений переноса, турбулентности, а также детализированной химической кинетики, является вычислительно сложной задачей. В работе рассмотрено численное трехмерное моделирование камеры сгорания двигателя с вращающейся детонационной волной. Моделируемая камера сгорания представляет собой коаксиальный полый цилиндр [1,2]. Топливо подается из системы инжекторов расположенных с торцевой части камеры, а также из стабилизирующей системы инжекторов осуществляющих подачу дополнительного окислителя под прямым углом с внешней и внутренней стороны камеры сгорания. Такая система позволяет топливу с окислителем хорошо перемешиваться в случае раздельной подачи. После поджига горючей смеси вблизи инжекторов, происходит инициация самоподдерживающейся детонационной волны, которая затем начинает вращаться вокруг внутреннего полого тела, потребляя горючую смесь. Продукты реакции расширяются и покидают камеру со стороны, противоположной форсункам, расположенным в торцевой части камеры сгорания. Первичное зажигание моделируется источником энергии, достаточно сильным для создания детонационной волны.

Для решения данной задачи была написана программа. Расчеты основаны на модели многокомпонентной газовой динамики, уравнение баланса массы для каждой из компонент газовой смеси, а также уравнения для моделирования турбулентности и химической кинетики [3,4]. При численном моделировании была использована интерполяция MUSCL переменных из центров ячеек на грани ячеек вместе с явным методом AUSM-plus, стабилизирующим схему [5,6]. Используемый метод второго порядка точности как по пространству, так и по времени, за исключением малых зон сильных градиентов. Используемая химическая кинетика, содержит 20 обратимых элементарных реакций с 9 компонентами. В моделировании химической кинетики использовался авторский кинетический механизм. Расчет потока химических реакций производился полунявным методом. При вычислении использовалась регулярная сетка однородных кубических элементов. Для проведения вычислений на серверной системе АПК-5 программа была распараллелена.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.F. Nikitin, Y.G. Filippov, L.I. Stamov, E.V. Mikhachenko 3D Problems of Rotating Detonation Wave in a Ramjet Engine Modeled on a Supercomputer // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2018, Vol 5, No 2; p. 76-85..
2. S.A. Zhdan, F.A. Bykovskii, E.F. Vedernikov, Mathematical modeling of a rotating detonation wave in a hydrogen-oxygen mixture. Combustion, Explosion, and Shock Waves 43 (4) (2007) 449-459.
3. Smirnov N.N., Betelin V.B., Nikitin V.F., Philippov Y.G., Koo J. Detonation engine fed by acetylene-oxygen mixture. Acta Astronaut. 2014.
4. Philippov Y.G., Dushin V.R., Nikitin V.F., Nerchenko V.A., Korolkova N.V., Guendugov V.M. Fluid mechanics of pulse detonation thrusters. Acta Astronaut. 2012;

76:115-126.

5. Hirsch, C. (1990), Numerical Computation of Internal and External Flows, vol 2, Wiley.
6. Liou, M.-S., "A Sequel to AUSM: AUSM+" J. Comput. Phys., Vol. 129, 364-382, 1996.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАМЕНИ ПО ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛА В ПОТОКЕ ОКИСЛИТЕЛЯ

Тюренкова В. В., Стамов Л. И.*

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской
академии наук», г. Москва*

** lyubenstamov@mail.ru*

FLAME SPREADING ALONG BURNING MATERIAL SURFACE IN AN OXIDANT FLOW

Tyurenkova V. V., Stamov L. I.*

*Moscow M.V. Lomonosov State University, Moscow, Russia
Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis of Russian
Academy of Sciences, Moscow, Russia*

** lyubenstamov@mail.ru*

Изучение процессов горения в условиях микрогравитации актуально для предотвращения их возникновения на космических аппаратах [1]. При этом необходимо учитывать, что горение в условиях невесомости отличается от горения в условиях земной гравитации, и основными факторами, влияющими на распространение пламени, являются воздушные потоки в атмосфере станции, а также тепловые потоки в материалах внутренних покрытий. Для детального изучения этих процессов наиболее простым способом является вычислительное моделирование распространения пламени над поверхностью горючего материала. В случае распространения пламени в замкнутой области, где нельзя пренебрегать влиянием соседних стенок, например, в гибридных двигателях, необходимо проводить трехмерное численное моделирование. Это позволяет выявить нестационарный и асимметричный характер процесса.

В данной работе представлены результаты численного моделирования распространения пламени в невесомости над поверхностью горючего материала. Разработана математическая модель с учетом особенностей диффузионного сгорания топлива в потоке воздуха. Выполнено трехмерное моделирование нестационарных процессов в химически реагирующей газовой смеси над термохимически разрушающейся поверхностью. Проведена верификация численной схемы с использованием аналитического решения [2,3]. В качестве примера рассмотрены процессы, происходящие в камере сгорания гибридного двигателя.

Подробное описание используемой системы определяющих уравнений представлено в работах [4, 5]. В работе было рассмотрено два способа определения теплового и массового потоков на поверхности горючего материала. В первом случае используются соотношения пристеночной модели турбулентности [6]. Во втором случае выражение для теплового потока основано на аналитическом решении для турбулентного режима [2]. Проведено сравнение данных способов с аналитическим решением, полученным в рамках приближения пограничного слоя.

Получено, что в начале зоны горения решения не совпадают из-за наличия кинетического режима вблизи кончика пламени, дальнейшее совпадение указывает на правильность численной модели и целесообразность использования полученной схемы. Решение задачи в трехмерной постановке позволило выявить нестационарные асимметричные эффекты, которые не проявляются при одномерном или двумерном моделировании.

Для исследования процессов, происходящих в камере сгорания гибридного двигателя, использовалась верифицированная численная модель. В ходе решения также наблюдалась асимметрия распространения пламени. Это свидетельствует о том, что при моделировании нестационарных состояний не следует сильно полагаться на симметрию. Полученные результаты демонстрируют стабилизацию потока и локализацию зоны горения вблизи стенок, что характерно для диффузионного пламени, установившегося в камере сгорания. Также показано, что сверхзвуковой режим не устанавливался до тех пор, пока пары топлива не заняли всю область камеры, а воспламенение топлива характеризовалось уменьшением молярной доли бутадиена на поверхности конденсированного топлива в центре камеры сгорания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jomaas G., Torero J. L., Eigenbrod C., Niehaus J., Olson S. L., Ferkul P. V., Legros G., Fernandez-Pello A. C., Cowland A. J., Rouvreau S. Fire safety in space – beyond flammability testing of small samples // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 109. P. 208-216.
2. Tyurenkova V. V., Smirnova M. N. Material combustion in oxidant flows: Self-similar solutions // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 120. P. 129–137.
3. Smirnov N. N., Tyurenkova V. V., Smirnova M. N. Laminar diffusion flame propagation over thermally destructing material // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 109. P. 217–224.
4. Betelin V. B., Kushnirenko A. G., Smirnov N. N., Nikitin V. F., Tyurenkova V. V., Stamov L. I. Numerical investigations of hybrid rocket engines // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 144. P. 363–370.
5. Tyurenkova V. V., Stamov L. I. Flame propagation in weightlessness above the burning surface of material // *Acta Astronautica*. 2019. Vol. 159. P. 342–348.*
6. Smirnov N. N., Betelin V. B., Shagaliev R. M., Nikitin V. F., Belyakov I. M., Deryuguin Y. N., Aksenov S. V., Korchazhkin D. A. Hydrogen fuel rocket engines simulation using logos code // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39. P. 10748–10756.

ОБНАРУЖЕНИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ ВРЕМЕННОГО РЯДА С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕР

Иванченко О. В.

ИАТЭ НИЯУ МИФИ

ovivanchenko@iate.obninsk.ru

Работа посвящена разработке способов построения процедур обработки дискретного временного ряда с целью обнаружения момента его перестройки.

В качестве основы для построения процедуры обнаружения момента перестройки временного ряда используется схематизация действий эксперта при визуальном анализе записи процесса.

В рамках Дискретного математического анализа [1] имеется несколько подходов к анализу свойств дискретных рядов: динамические коридоры [2], регрессионные производные [3] и геометрические меры [4], которые используются в настоящей работе.

Построение процедуры обработки записи процесса, имитирующей действия эксперта при визуальном анализе, можно осуществить средствами Дискретного математического анализа. Описываемый в данной работе подход основан на изучении геометрических характеристик временного ряда. Перестройка расценивается как резкое изменение этих характеристик. В этом подходе производится переход от временного ряда к геометрическим мерам. Геометрические меры отражают характер морфологии временного ряда. С их помощью можно описать такие геометрические свойства, как например, «фон временного ряда», «начало горы», «подъем», «пик», «спуск», «конец горы» и другие.

Эксперт просматривает график записи процесса, стараясь уловить тенденцию его изменения, не принимая во внимание кратковременные незначительные изменения, имеющие характер нерегулярных возмущений. В процессе просмотра эксперт охватывает взглядом не всю запись сразу, а её фрагмент, попадающий в скользящее временное окно просмотра заданной ширины. Запись процесса, находящаяся в пределах окна просмотра, анализируется на предмет выявления тренда: процесс эволюционирует в сторону возрастания/убывания или не меняется. Далее окно просмотра сдвигается вправо по оси времени и анализ повторяется. Если в пределах некоторого окна просмотра экспертом фиксируется смена тренда, то делается вывод о перестройке процесса в момент времени, приблизительно совпадающий с моментом смены тренда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян С.М. Дискретный математический анализ и нечеткая логика в геофизических приложениях: дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. РАН Геофизический центр РАН, Москва, 2005.
2. Каган А.И., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Определение стохастической непрерывности методами нечеткой логики и геофизические приложения // Тезисы докладов Международной конференции «Итоги Электронного Геофизического Года», Переславль-Залесский, 2009. С. 99.
3. Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Иванченко О.В., Камаев Д.А. Регрессионные производные и их применение для регистрации вступления волны цунами по записи уровня моря // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24. № 1. С. 28-41
4. Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Гвишиани А.Д., Граева Е.М., Злотники Ж., Родкин М.В. Исследование морфологии сигнала на основе алгоритмов нечеткой логики // Геофизические исследования. 2005. Т. 4, №1. С. 143–155.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЗДЕЛИЯ В ВИДЕ ГРАНИЦ ЧЕРНОВА

Перевода А. И.

*Обнинский институт атомной энергетики (ИАТЭ НИЯУ МИФИ)
Pereguda@iate.obninsk.ru*

В данной работе рассматривается задача вычисления показателей параметрической надежности изделий функционирующих в условиях деградации. Обеспечение надежности изделий, в таких условиях, включает обнаружение всех видов возможных пере-

ходов изделий из одного состояния в другое, установление причин отказов и их последствия, а также их тренд, а также сроки выполнения диагностических мероприятий по определению текущего состояния изделия. В этой связи возникает потребность в математических моделях параметрической надежности, позволяющих *адекватно описывать процесс функционирования изделия и получать количественные показатели надежности необходимой точности*. Здесь при решении этой задачи использован аналитический аппарат теории вероятности, а именно, и производящей функции семиинвариантов этой суммы. В результате чего получена оценка вероятности пересечения процессом функционирования заданного уровня в виде границ Чернова, которую принято называть экспоненциально точной.

Ключевые слова: «хвост» распределения, производящая функция семиинвариантов, случайные величины, наработка до отказа, математическое ожидание, дисперсия, функция распределения, граница Чернова.

ESTIMATION OF PROBABILITY OF INTERSECTION OF THE SET LEVEL BY THE PROCESS OF PRODUCT FUNCTIONING WITH THE USE OF CHERNOV BORDERS

Pereguda A. I.

Obninsk Institute of Nuclear Power Engineering, National Research Nuclear University "MEPhI"

pereguda@iate.obninsk.ru

In the given work the problem of calculation of parametric reliability of products functioning in conditions of degradation is considered. Ensuring the reliability of products, in such conditions, includes the detection of all types of possible transitions of products from one state to another, the establishment of the causes of failures and their consequences, as well as their trend, as well as the timing of diagnostic measures to determine the current state of the product. In this regard, there is a need for mathematical models of parametric reliability, allowing to adequately describe the process of functioning of the product and to obtain quantitative indicators of reliability of the necessary accuracy. Here, when solving this problem, the analytical apparatus of the probability theory is used, namely, the one that produces the functions of seven variants of this sum. As a result, the probability of intersection of the process of functioning of a given level in the form of Chernov's boundaries, which is usually called exponentially accurate, is estimated.

Keywords: the "tail" of the distribution, generating function of semi-invariants, random variables, operating time to failure, mathematical expectation, dispersion, distribution function, Chernov boundary.

Введение

Одной из важных характеристик, учитываемых при проектировании, разработке и эксплуатации систем, является надежность, поскольку показатели надежности являются основными характеристиками качества любого изделия. Реализация сложных технических систем, повлекла развитие математических методов оценки надежности, так как количественная оценка показателей надежности стала насущной необходимостью, особенно в тех случаях, когда речь идет о надежности систем больших масштабов и сложности. Поскольку, показатели надежности можно задавать, анализировать, изменять и измерять как конструктивный параметр изделия. Обеспечение надежности системы включает обнаружение всех видов возможных переходов из одного состояния

в другое, установление причин и их последствий, планирование мероприятий, позволяющих ограничить число отказов технических систем до приемлемого уровня. Разумеется, оценка количественных показателей надежности систем представляет собой лишь малую часть объема работ из комплекса практической деятельности по обеспечению необходимого уровня надежности, но без тщательного вероятностного анализа процесса функционирования систем невозможно вырабатывать сколько-нибудь обоснованные решения.

Постановка задачи и основные обозначения

Показатели надежности любого изделия можно получить, изучая поведение одного или нескольких его параметров, которые будут полностью отражать качество функционирования изделия. Если процессы изменения параметров изделия наблюдаемы, прогнозируемы и управляемы, то, очевидно, существует возможность планирования мероприятий предотвращающих возможные отказы изделий. Отказы являются следствием отклонений определяющих параметров от их исходных (номинальных, расчетных) значений. Формой проявления отказа является выход параметров за пределы области допустимых значений (области работоспособности).

Математической моделью надежности во многих случаях является математический аппарат теории непрерывных марковских случайных процессов или теории винеровских процессов, где рассматривается изменение определяющего параметра как блуждание частицы по решетке с некоторым шагом [1,2]. Траектория броуновского процесса весьма изрезана, но вместе с тем, непрерывна и с вероятностью единица не дифференцируема ни в одной точке [2 – 6]. Представляет интерес в этой связи, какова вероятность того, что случайный процесс $\xi(t)$ впервые достигнет либо заданной верхней границы $a < x$, либо нижней $b > x$, либо пересечет границу, если задана только одна из них?

В ряде работ [7 – 10] рассматриваются методы построения показательных оценок, т.е. поиск оценок вероятности того, что случайная сумма независимых случайных величин больше некоторого заданного числа. Во всех этих работах, такие оценки получают с использованием неравенства Чебышева вида:

$$P\{L(t) > x\} \leq \frac{EL(t)}{g(x)}, \quad (1)$$

где $g(x)$ – неубывающая неотрицательная функция, определенная на интервале $[0, \infty)$, причем эта функция и ее производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности, x – некоторое заданное значение, $L(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i$ – случайная накопленная нагрузка в момент времени t , а, следовательно, неравенство Чебышева позволяет получить оценку вероятности отказа изделия за время функционирования изделия t .

Будем рассматривать процесс функционирования некоторого изделия, причем значения определяющего параметра его работоспособность измеряются в моменты времени $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$, а $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ где $i > 0$, $t_0 = 0$ [12,13]. Введенные, таким образом, случайные величины τ_i есть длины интервалов времени между соседними измерениями определяющего параметра. Заметим, что если случайная величина равна $\tau_1 = t_1 - t_0$, то $F(t) \neq F_1(t) = P\{\tau_1 \leq t\}$, т.е. величина τ_0 распределена иначе, чем все остальные случайные величины τ_i , $i = 1, 2, \dots$ Будем также предполагать, что функции распределения $F(t)$ и $F_1(t)$ не являются арифметическими и каждая из величин τ_0 , τ_i имеет конечные первые два математических момента, т.е. $E\tau_0 < \infty$, $E\tau < \infty$, $D\tau_0 < \infty$ и $D\tau < \infty$. Последовательность $\{\tau_i, i \geq 1\}$ принято называют процессом восстановления с запаздыванием [14].

Рассмотрим далее второй случайный процесс, соответствующий изменению определяющего параметра. Пусть θ_0 обозначает случайное начальное значение определяющего параметра работоспособности изделия, которое предполагается независимым от последовательности $\{\tau_i, i \geq 1\}$ и имеет произвольную функцию распределения $G_0(y) = P\{\theta_0 \leq y\}$ (см. в [11]). Введем случайные величины γ_i – значения определяющего параметра, измеренного в момент времени t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, и сформируем последовательность приращений $\theta_k = \gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, которые являются независимыми случайными величинами. Естественно предположить, что случайные приращения θ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ распределены с одной и той же функцией $G(x)$, которые порождают случайный процесс восстановления с запаздыванием. Далее предполагаем, что математические ожидания и дисперсии случайных величин θ_0, θ удовлетворяют следующим условиям $E\theta_0 < \infty$, $E\theta < \infty$, $D\theta_0 < \infty$, $D\theta < \infty$.

Целью данной работы является поиск наиболее эффективных оценок вероятности того, что случайная сумма независимых случайных величин превосходит некоторое заданное значение. Заметим, что такого рода задачи являются общими как для теории вероятности, так и в теории информации, теории надежности, теории связи и др. и поэтому они требуют общего рассмотрения.

Основные результаты

Здесь рассматривается метод получения оценки вероятности того, что случайная сумма случайных величин θ_i , $i = 1, 2, \dots, N(t)$ превышает заданное значение x , причем при получении оценки вероятности того, что величина определяющего параметра изделия превысила установленные границы работоспособности будем использовать распределения этих случайных величин, предполагая что эти величины с конечными числовыми характеристиками; математическими ожиданиями $E\theta_0, E\theta, E\tau$ и дисперсиями $D\theta_0, D\theta, D\tau$. Вероятность того, что случайная сумма случайных величин θ_i , $i = 1, 2, \dots, N(t)$ превышает заданное значение x запишем, используя определения функции распределения случайной величины $L(t)$, так

$$P\{L(t) \leq x\} = \int_x^\infty \hat{f}_{L(t)}(y) dy,$$

где $\hat{f}_{L(t)}(x)$ – плотность распределения случайной величины $L(t)$. Запишем вероятность $P\{L(t) \leq x\}$ несколько в ином виде, а именно $P\{L(t) \leq x\} = \delta(L(t) - x) \int_x^\infty \hat{f}_{L(t)}(y) dy$, где $\delta(t) = 1 \times J_{t>a} + 0 \times J_{t<a}$ – где единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда), $J_{t<a}$ – индикатор события $t < a$. Очевидно, что для $\lambda \geq 0$ единичная ступенчатая функция ограничена сверху показательной функцией вида: $\delta(y - x) \leq \exp(\lambda(y - x))$, тогда

$$P\{L(t) \leq x\} \leq \exp(-\lambda x) \int_{-\infty}^\infty \exp(\lambda y) \hat{f}_{L(t)}(y) dy = E \exp(\lambda(L(t) - x)), \quad \lambda \geq 0. \quad (2)$$

В случае если $\lambda < 0$, $L(t) \leq x$, аналогично (2) можно записать неравенство и для $P\{L(t) \leq x\}$.

$$P\{L(t) \leq x\} \leq E \exp(\lambda(L(t) - x)), \quad \lambda \leq 0. \quad (3)$$

Таким образом, неравенство (3) оценивает вероятность того что случайная сумма случайных величин меньше заданного значения x , а неравенство (2) оценивает вероятность того что случайная сумма случайных величин больше заданного значения x и причем эти вероятности совпадают. Замечая, что $E e^{\lambda L(t)}$ является производящей функцией моментов случайной величины $L(t)$, которую обозначим через $M_{L(t)}(\lambda)$

$$M_{L(t)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda y) \hat{f}_{L(t)}(y) dy = E \exp(\lambda L(t)), \quad (4)$$

где λ — действительная переменная, $E\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ , $\hat{f}_{L(t)}(x)$ — плотность распределения случайной величины $L(t)$.

При вычислении производящей функции моментов случайной величины $L(t)$ воспользуемся формулами условного и повторного математического ожидания, что позволяет (4) переписать так [7,15]

$$M_{L(t)}(\lambda) = M_{\theta_0}(\lambda) M_{\theta}(\lambda) E N(t) = M_{\theta_0}(s) M_{\theta}(\lambda) H(t), \quad (5)$$

где $H(t) = EN(t)$ — функция восстановления.

Теперь еще раз перепишем функцию $P\{L(t) \geq x\}$ в терминах производящей функции моментов, учитывая при этом (5), тогда

$$P\{L(t) \geq x\} \leq \exp(-\lambda x) M_{\theta_0}(\lambda) M_{\theta}(\lambda) H(t) = \exp(\chi_{L(t)}(\lambda) - \lambda x), \quad (6)$$

где $\chi_{L(t)} = \ln M_{L(t)}(\lambda)$ — производящей функцией семиинвариантов случайной величины $L(t)$.

Заметим, что неравенство (4) верно для всех $\lambda \geq 0$ и функция $e^{-\lambda x} e^{(\chi_{\theta_0}(\lambda) + H(t)\chi_{\theta}(\lambda))}$ является выпуклой функцией по λ , то наиболее точную границу можно получить находя стационарную точку этой функции. Тогда стационарная точка функции $e^{-\lambda x} e^{(\chi_{\theta_0}(\lambda) + H(t)\chi_{\theta}(\lambda))}$ определяется уравнением связи между значением x и параметром λ_0

$$x = \chi'_{L(t)}(\lambda_0). \quad (7)$$

Подставляя (7) в неравенство (6), получаем границу Чернова для “хвоста” распределения в окончательном виде

$$P\{L(t) \geq x\} \leq \exp(\chi_{L(t)}(\lambda) - \lambda \chi'_{L(t)}(\lambda)), \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

При решении уравнения (7) необходимо учитывать распределение суммы случайных величин θ_i , $i = 1, 2, \dots, N(t)$. В [12] получено асимптотическое соотношение распределения случайной величины $L(t)$, которым воспользуемся при дальнейших вычислениях. Далее будем рассматривать центрированную случайную величину $\eta(t) = (L(t) - EL(t))/\sigma_{L(t)}$, которая, как показано в [15] распределена по закону $N(0,1)$. Тогда $L(t) = \eta(t)\sigma_{L(t)} + EL(t)$ и производящая функция моментов суммы нормально распределенных случайных величин определяется равенством

$$M_{L(t)}(\lambda) = \exp(\lambda EL(t)) E \exp(\lambda \sigma_{L(t)} \eta(t)) = \exp(\lambda EL(t)) M_{\eta(t)}(\lambda \sigma_{L(t)})$$

Производящую функцию моментов случайной величины $\eta(t)\sigma_{L(t)}$ вычислим так

$$M_{\eta(t)}(\lambda \sigma_{L(t)}) = 1 / \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{(\lambda \sigma_{L(t)})^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\lambda \sigma_{L(t)} - y)^2}{2}\right) dy = \exp\left(\frac{(\lambda \sigma_{L(t)})^2}{2}\right)$$

Подставим вычисленную производящую функцию моментов случайной величины $\eta(t)\sigma_{L(t)}$ в соотношении $M_{L(t)}(\lambda)$, имеем

$$M_{L(t)}(\lambda) = \exp(\lambda(EL(t) + \lambda \sigma_{L(t)}^2 / 2)).$$

После выполненных вычислений легко записать производящую функцию семинвариантов случайной величины $L(t)$. Действительно из (8) имеем

$$\chi_{L(t)}(\lambda) = \lambda EL(t) + (\lambda \sigma_{L(t)})^2 / 2 \quad (9)$$

Используя асимптотические теоремы теории восстановления [14] (8) перепишем так

$$P\{L_t \geq x\} \leq \exp(-(x - E\theta_0 - H(t)E\theta)^2 / 2(\sigma_0^2 + E\theta)^2 \sigma_{N(t)}^2 + H(t)\sigma_\theta^2).$$

В случае большого времени функционирования изделия оценка вероятности того, что сумма случайных величин θ_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N(t)$ превышает значение x примет вид:

$$P\{L_t \geq x\} \leq \exp \left\{ - \frac{x - E\theta_0 + \left\{ \frac{t}{E\tau} + \frac{\sigma_\tau^2}{2(E\tau)^2} - \frac{1}{2} \right\} E\theta}{2\sigma_{\theta_0}^2 + t(E\theta)^2 / E\tau\sigma_\tau^2 + (E\tau)^2 + \frac{\sigma_\theta^2}{(E\theta)^2}} E\theta \right\} \quad (10)$$

Отметим, что оценка довольно просто вычисляется, а границу Чернова называют *экспоненциально точной* [10].

Так в [12] рассмотрена математическая модель надежности расходомера, являющейся суперпозицией двух процессов восстановления с запаздыванием. Изучение математической модели надежности процесса функционирования датчика расхода теплоносителя позволило получить экспоненциальную оценку вероятности того, что параметры, определяющие работоспособность датчика, не пересекали заданные уровни используя неравенство Чебышева (1). В итоге получена оценка вероятности того, что накопленная нагрузка превышает установленного значения x , которую запишем так

$$P\{\theta_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} \theta_i \leq x\} \geq 1 - \exp(-x_a^2 / 4B(1 - x_a B_1 / 2B^2)), \quad (11)$$

где $B = 0.5\sigma_{L(t)}^2 = 0.5(\sigma_0^2 + H(t)\sigma_\theta^2 + (E\theta)^2\sigma_{N(t)}^2)$; $B_1 = 0.5\sigma_{L(t)}^2 = 0.5(\sigma_0^2 + H(t)\sigma_\theta^2 + (E\theta)^2\sigma_{N(t)}^2)$; $x_a = x - E\theta_0 - H(t)E\theta$, $|L_t - EL_t| \leq A/A$ – константа.

Заключение

При решении задачи оценки вероятности того, что случайная сумма независимых случайных величин превосходит некоторое заданное значение, использовали аналитический аппарат теории вероятности: производящую функцию моментов и производящую функцию семинвариантов $L(t)$. Получена оценка вероятности пересечения процессом заданного уровня в виде границ Чернова, которую принято считать экспоненциально точной. Численные вычисления показали, что оценка вероятности того, что накопленная нагрузка определяющим параметром изделия больше заданного значения представленная в виде границы Чернова (10), больше значения вероятности вычисленной по соотношению (11) при всех t , поскольку в (11) учитываются оба «хвоста» распределения. Очевидно, что для оценки вероятности пересечения процессом функционирования заданного уровня целесообразно использовать границы Чернова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.

2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. Учеб. пособие. – М.: Логос, 2000. – 1000 с.
4. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1987. – 494 с.
5. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Наукова думка, 1978. – 581 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 365 с.
7. Лозьв М. Теория вероятностей. Пер. с англ. – М.: Изд-во ИЛ., 1962. – 720 с.
8. Ламперти Дж. Вероятность. Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 183 с.
9. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. Пер. с англ. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.
10. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 629 с.
11. Перегуда А.И., Андреев А.Г. Асимптотический метод вычисления показателей долговечности изделий, функционирующих в условиях ударных нагрузок. // Надежность. – 2007. – № 3 (22). – С. 31–39.
12. Перегуда А.И. Надежность системы измерения расхода теплоносителя реактора РБМК – 1000 // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2018. – № 3. – С. 148 – 159.
13. Перегуда А.И., Белозеров В.И. Прогнозирование надежности датчиков расхода теплоносителя ШАДР-32М // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2017. – № 1. – С. 51–62.
14. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. – 393 с.
15. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 575 с.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТА ПО МНОГОПОЛОСНОЙ МАГИСТРАЛИ, С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ МОТИВАЦИЙ К ПЕРЕСТРОЕНИЮ

Пестов Д. А.^{1,2}, Смирнова М. Н.¹, Никитин В. Ф.^{1,2}, Тюренкова В. В.^{1,2}, Zuojin Zhu³

¹ *Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*

² *Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований, Москва*

³ *Faculty of Engineering Science, USTC, Hefei, 230026, China*

В данной работе представлена двумерная континуальная модель движения транспорта по многополосной магистрали с учетом необходимости перестроений в ту или иную полосу. Данная постановка задачи не приводит к аналогии с уравнениями газовой динамики ввиду того что модель анизотропна, но методы, применяющиеся для расчета газодинамических задач применимы в данной постановке для обеспечения устойчивости и точности численного решения. Также в работе представлены результаты численного моделирования движения транспорта по многополосной магистрали.

Ключевые слова: Моделирование транспорта, сплошная среда, двумерная модель, анизотропия.

COMPUTATIONAL METHOD FOR MULTILANE TRAFFIC FLOW MODELS WITH DIFFERENT LANE CHANGING MOTIVATIONS

Pestov D. A.^{1,2}, Bogdanova A. I.¹, Smirnova M. N.¹, Nikitin V. F.^{1,2}, Tyurenkova V. V.^{1,2}, Zuojin Zhu³

¹ *Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow M.V.Lomonosov State University, Moscow, Russia*

² *Federal Science Center "Scientific Research Institute for System Analysis", Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

³ *Faculty of Engineering Science, USTC, Hefei, 230026, China*

The present research was aimed at mathematical modeling of essentially unsteady-state traffic flows on multilane roads, wherein massive changing of lanes produces an effect on handling capacity of the road segment. The model takes into account drivers motivations for lane changing before the crossing caused by the necessity of the maneuver on entering multilane road crossing. The model is based on continua approach. However, it has no analogue in the classical hydrodynamics because momentum equations in the direction of a flow and in orthogonal directions of lanechanging are different. To provide stability and accuracy of the numerical solution we use the computation method common to gas dynamics. Numerical simulations of traffic flows in multilane roads were performed and their results are presented.

Введение

Транспортные потоки представляют собой важный объект для изучения в виду серьёзного влияния на время в пути и экономическую активность. Для того, чтобы определить и уточнить свойства и особенности транспортных потоков было создано множество макроскопических моделей движения транспорта: например, модель ЛВР [1,2], Эйлера модель [3] газокинетическая модель [4,5], подобные Навье-Стоксу [6], класс моделей второго порядка [7,8] и общие модели [9,10].

Гринберг [7,11] проанализировал семейство транспортных моделей второго порядка и показал, что такие модели поддерживают стабильные колебательные бегущие волны, типичные для перегруженных участков дороги. Стабильные движущиеся волны возникают при таком расстоянии между машинами, для которого константные решения нестабильны.

Борше, Кимати и Клар [8] рассмотрели и численно сравнили специальный класс многофазных транспортных теорий, основанный на микроскопических, кинетических и макроскопических моделях и обнаружили, что для всех из них, кроме одной, фазовые переходы могут возникать в окрестности так называемого «бутылочного горлышка» в зависимости от локальной плотности и скорости потока.

Применяя расширенные методы статистической физики и нелинейной динамики для самодвижущихся систем множества частиц, Хелберг [12] ответил на некоторые вопросы о природе транспортных потоков, такие как: Почему машины иногда останавливаются в «призрачных пробках» несмотря на то, что все водители предпочли бы ехать быстро? Какие механизмы лежат в основе движения постоянными остановками (как, например, в глухой пробке)? Почему существует несколько типов перегруженного потока и как они связаны? и так далее. Нагати [13] сообщил, что транспортные системы демонстрируют удивительно богатый спектр пространственно-временных образований. Такие образования, как и причина такого разнообразия может быть исследована с помощью автомобилецентричных моделей [14], метода клеточных автоматов [15-17], газокинетических или гидродинамических моделей [4-6] .

Сейчас моделирование транспортных потоков развивается в нескольких направлениях: одни работы посвящены методам определения оптимальных параметров для уравнений движения транспорта [18,19] а также определению вида связей между характеристиками транспортного потока [20-22], другие посвящены разработке моделей, включающих в себя различные типы участвующего в движении транспорта или различные стили вождения [23] или же уделяют более пристальное внимание распространению информации в потоке транспорта [24]. Кроме того, уделяется внимание взаимодействию транспорта и пассажиропотоков [25,26] или двумерным моделям движения транспорта по многополосным магистралям [27].

Кроме того, в следующих статьях можно найти некоторые достойные работы о макроскопических транспортных моделях [28-34], а также о учете влияния вязкоупругости на транспортные потоки [35,36]. В работе [37] достаточно подробно представлено состояние вопроса насчет предсказания времени поездки, а некоторые детали можно подцепнуть в более поздних работах на эту тему [38-41]

Настоящая работа нацелена на создание метода, позволяющего эффективно моделировать движение транспорта при приближении к перекресткам или развязкам, где множественные перестроения существенно влияют на скорость потока. Кроме того, представленная многокомпонентная модель может быть использована для моделирования потоков автотранспорта, состоящих из различных типов автомобилей (грузовые, легковые, общественный транспорт и т.п.).

1. Непрерывная модель транспортных потоков

Введем Эйлерову систему координат, с осью Ox направленной вдоль участка дороги по направлению движения и оси Oy , направленной поперёк потока. Время обозначим как t . Определим среднюю плотность $\rho(x,y,t)$, как отношение площади дороги, занятой автомобилями (под площадью, занятой автомобилем, следует понимать не только площадь, физически занятую автомобилем, но и некоторую область вокруг автомобиля, необходимую для удержания безопасной дистанции, так называемые, «динамические габариты»), к общей площади участка дороги.

$$\rho = \frac{S_{tr}}{S} = \frac{hNl}{HL} = \frac{nl}{L},$$

где h это ширина полосы, H – ширина участка дороги, L это длина участка дороги, l – средняя длина автомобиля плюс минимальное расстояние между стоящими автомобилями, N это общее количество машин на дороге, а n – среднее число автомобилей на полосе. Согласно этому определению ρ – безразмерная величина, меняющаяся от нуля до единицы. Скорость транспорта обозначим $V(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))$, где u может меняться от нуля до U_{max} , где U_{max} – максимальная разрешенная скорость. Из определения следует, что случай максимальной плотности $\rho = 1$ соответствует ситуации когда автомобили стоят почти вплотную друг к другу. Естественно будет предположить, что в таком случае будет иметь место пробка с $V = 0$.

Определив «массу», распределенную на участке площадью S как:

$$m = \int_S \rho dx dy,$$

Можно получить «закон сохранения массы» в форме уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Далее необходимо получить уравнения для движения транспорта. Движение транспортного потока определяется множеством факторов: реакцией водителей на дорожную ситуацию, действиями водителей и реакцией их транспортных средств, техническими характеристиками автомобилей. Введем следующие предположения:

- Модель рассматривает усредненное движение транспорта, а не движение отдельных транспортных средств. Следовательно, в модели используются усредненные характеристики автомобилей и не уделяется внимания различиям в мощности, длине тормозного пути или различной скорости реакции водителей.
- Предполагается естественная реакция водителей на дорожные события. Например, водитель, увидевший впереди пробку, знак ограничения скорости или красный свет светофора предположительно будет замедляться до остановки или до достижения безопасной скорости, а не ускоряться, чтобы потом экстренно затормозить.
- Предполагается что все водители соблюдают правила дорожного движения. В частности, они соблюдают скоростной режим и стараются поддерживать безопасную дистанцию между автомобилями в зависимости от скорости.

В таком случае уравнение для продольной компоненты скорости запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a, \quad a = \max \{ -a^-; \min \{ a^+, a_x \} \}; \\ a_x &= \sigma a_\rho + \frac{(1-\sigma)}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} a_\rho(t,s) ds + \frac{U(\rho) - u}{\tau}; \\ a_\rho &= -\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_+ \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь a это ускорение; a^+ – максимально возможное ускорение, a^- – ускорение при экстренном торможении; a^+ и a^- – положительные параметры, определяемые техническими свойствами автомобиля. Индекс «+» обозначает производную справа. Параметр $k > 0$ представляет собой скорость распространения малых возмущений (или «скорость звука»), что было показано в работах [42-44]. Параметр τ – это время задержки, зависящее от времени реакции водителя и отклика автомобиля. Этот параметр отвечает за стремление водителей держать скорость автомобиля как можно ближе к максимальной безопасной скорости для данной плотности транспортного потока $U(\rho)$:

$$U(\rho) = \begin{cases} k \ln \rho, & u < U_{\max} \\ \min \{ U_{\max}; k \ln \rho \}, & u \geq U_{\max} \end{cases}.$$

Скорость $U(\rho)$ определена из зависимости скорости потока транспорта от плотности в «простой волне», когда поток начинает движение из начального состояния $\rho_0 = 1$ и $u = 0$, с учетом ограничения сверху ($u < U_{\max}$). Значение τ может отличаться для ускорения и торможения до безопасной скорости $U(\rho)$:

$$\tau = \begin{cases} \tau^+, & U(\rho) < u \\ \tau^-, & U(\rho) \geq u \end{cases}.$$

В правой части уравнения (2) первый член описывает влияние локальной ситуации на дороге, второй – влияние ситуации впереди по потоку, а третий – стремление водителей двигаться с безопасной скоростью. Если предположить $\sigma = 0$, выражение для a_x примет вид:

$$a_x = \frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} a_\rho(t, s) ds + \frac{U(\rho) - u}{\tau}$$

В таком случае ускорение зависит от ситуации на участке длины Δ перед автомобилем, где Δ – расстояние которое каждый водитель принимает во внимание, при выборе скорости. Это расстояние зависит от качества дороги и погодных условий. Если предположить $\sigma = 1$, то a_x примет вид:

$$a_x = a_\rho + \frac{U(\rho) - u}{\tau}$$

Так ускорение зависит только от локальной ситуации.

Мы будем рассматривать случай $\sigma = 1$, $\tau = \infty$, то есть уравнение движения для продольной компоненты скорости будет иметь вид:

$$a_x = -\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_+ \quad (3)$$

Уравнение движения для поперечной компоненты скорости запишем в аналогичном виде:

$$a_y = -\frac{A^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (4)$$

Для понимания физического смысла параметра A рассмотрим следующую модельную задачу. Один автомобиль перестраивается из полосы с плотностью $\rho \neq 0$ в пустую полосу, где плотность $\rho = 0$. В таком случае перестроение происходит с наибольшим ускорением a_{max} . То есть, подставив $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{0 - \rho}{h}$ в уравнение движения для поперечной компоненты скорости, получим $\rho \frac{dv}{dt} = -A^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$ и, далее, $\frac{A^2}{h} = a_{max}$.

На (рис.1) показан график для $v(y)$. Согласно ему мы имеем: $v_{max} = \sqrt{a_{max} h}$, то есть $a_{max} = \frac{v_{max}^2}{h}$ или $A^2 = v_{max}^2$. Но в данном случае $v_{max} = 2v_{cp}$ (v_{cp} – средняя поперечная скорость автомобиля при перестроении), и, следовательно, $A^2 = 4v_{av}^2$.

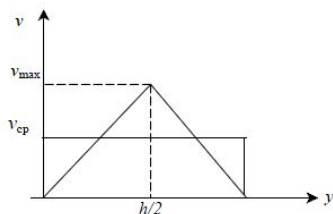


Рис. 1. Скорость перестроения

Для описания динамики перестроения, примем за приближенную траекторию перестроения линию, состоящую из двух дуг окружностей одинакового радиуса (рис.2). На

быть общей для всех компонент. В таких условиях система уравнений, описывающая движение транспортного потока примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)_i}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)_i}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_+ + g, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + u \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} &= -\frac{A^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \dot{f}_i \\ i &= 1, 2, 3; \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \\ v &= \frac{1}{\rho} (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \rho_3 v_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Член g в уравнении движения (5) имеет вид массовой силы, которая характеризует реакцию водителя на изменение сигнала светофора (торможение или ускорение). В качестве первого приближения, это воздействие представим в следующей релаксационной форме:

$$g = -(1 - \rho) \frac{U(t) - u}{\tau_0} \exp\left(-\frac{x_0 - x}{l_s}\right), \quad (6)$$

где l_s это характерное расстояние начала замедления перед светофором, τ_0 – характерное время реакции на смену сигнала светофора. $U(t)$, в свою очередь, равна нулю при красном свете светофора и равна $U(\rho)$ при зеленом.

Члены уравнений, отражающие стремление водителей к перестроениям, можно также выразить в релаксационной форме:

$$\dot{f}_i = \begin{cases} -(1 - \rho_i) \frac{A^2}{h_i} \exp\left(-\frac{x_0 - x}{l_m}\right), & y > y_i^+ \\ 0, & y_i^+ > y > y_i^- \\ (1 - \rho_i) \frac{A^2}{h_i} \exp\left(-\frac{x_0 - x}{l_m}\right), & y < y_i^- \end{cases} \quad (7)$$

$$y_1^- = 0, y_1^+ = y_2^- = \frac{H}{3}, y_2^+ = y_3^- = \frac{2H}{3}, y_3^+ = H,$$

где h_i – ширина полосы или области дороги с которой разрешен проезд в соответствующем направлении.

Система уравнений (5) представляет континуальную модель движения транспорта. Член $-\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ был проверен в работах [45,46] через сравнение численных результатов с экспериментальными данными, полученными в работах [2,11]. Член $-\frac{A^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}$ – новый, был аккуратно выведен, основываясь на физических характеристиках автомобилей и сделанных предположениях. Формулы для определения массовых сил g и $\dot{f}_i$, (1.6, 1.7) являются предположениями модели, которые должны быть проверены через сравнение с экспериментами. Более точные значения параметров модели можно получить из наблюдений. Для численного решения был использован набор модельных параметров, основанный на имевшихся данных. Качественное сравнение результатов численного счета с прямыми наблюдениями будет представлено в конце секции 4.

2. Численное решение

Рассматриваемая проблема – численное моделирование поведения автомобилей на прямоугольном участке дороги перед перекрестком с учетом необходимости для части автомобилей заранее перестроиться в ту или иную полосу.

2.1. Использование метода AUSM

Основная проблема численного решения уравнений газовой динамики – устойчивость численной схемы. Для обеспечения требуемой устойчивости, в схеме должны быть использованы разности, направленные против потока [47]. То есть следует строить разностную схему с учетом взаимодействия ячеек и направления распространения волн по сетке. В методе AUSM взаимодействие между ячейками реализуется с помощью групп частиц с известным распределением скорости. Чтобы разделить эти группы на «направленные по потоку» и «направленные против потока», используем методы разделения потоков.

Будем решать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial y} = f,$$

$$w = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho u \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_2 v_2 \\ \rho_3 v_3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho_1 u \\ \rho_2 u \\ \rho_3 u \\ \rho u^2 + k^2 \rho \\ \rho_1 u v_1 \\ \rho_2 u v_2 \\ \rho_3 u v_3 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 v_1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_1 v_1 u \\ \rho_1 v_1^2 + A^2 \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_2 v_2 \\ 0 \\ \rho_2 v_2 u \\ 0 \\ \rho_2 v_2^2 + A^2 \rho \\ 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_3 v_3 \\ \rho_3 v_3 u \\ 0 \\ 0 \\ \rho_3 v_3^2 + A^2 \rho \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho g + \rho \frac{U(\rho) - u}{\tau} \\ \rho_1 \dot{f}_1 \\ \rho_2 \dot{f}_2 \\ \rho_3 \dot{f}_3 \end{pmatrix}.$$

Для удобства обозначим $\frac{k^2}{\rho_i} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{A^2}{\rho_i} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, как p_x и p_{iy} соответственно.

Первым шагом для построения AUSM схемы будет разделение потоков на конвективный и компрессионный:

$$F = F^c + F^p, \quad G_i = G_i^c + G_i^p,$$

$$M_x = \frac{u}{k}, \quad M_{iy} = \frac{v_i}{A},$$

$$F^c = M_x \begin{pmatrix} \rho_1 k \\ \rho_2 k \\ \rho_3 k \\ \rho u k \\ \rho_1 v_1 k \\ \rho_2 v_2 k \\ \rho_3 v_3 k \end{pmatrix}, F^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^2 \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G_1^c = M_{1y} \begin{pmatrix} \rho_1 A \\ 0 \\ 0 \\ \rho_1 A u \\ \rho_1 A v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G_1^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^2 \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2^c = M_{2y} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_2 A \\ 0 \\ \rho_2 A u \\ 0 \\ \rho_2 A v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, G_2^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^2 \rho \\ 0 \end{pmatrix}, G_3^c = M_{3y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_3 A \\ \rho_3 A u \\ 0 \\ 0 \\ \rho_3 A v_3 \end{pmatrix}, G_3^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^2 \rho \end{pmatrix}.$$

F^c , G_i^c – конвективные потоки, F^p , G_i^p – компрессионные потоки, M_x , M_{yi} – Числа Маха. Конвективные потоки выражаются через числа Маха и столбец «пассивных» переменных. Компрессионные потоки содержат только давление. Во-первых, рассмотрим конвективные потоки. Индексами 'R' и 'L' обозначим значения «справа» и «слева» от ячейки. Конвективные потоки на границе ячейки примут следующий вид:

$$F^c = M_x \begin{pmatrix} \rho_1 k \\ \rho_2 k \\ \rho_3 k \\ \rho u k \\ \rho_1 v_1 k \\ \rho_2 v_2 k \\ \rho_3 v_3 k \end{pmatrix}_{L/R}, G_1^e = M_{1y} \begin{pmatrix} \rho_1 A \\ 0 \\ 0 \\ \rho_1 A u \\ \rho_1 v_1 A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{L/R} \text{ и т.д.}$$

2.2 Разделение конвективных потоков

Основная идея AUSM подхода состоит в том, что все потоки на границе ячеек разделяются в зависимости от числа Маха. Это значит, что все значения «пассивных» переменных переносятся из ячеек, откуда направлен поток. Рассмотрим применение этого метода для направления вдоль оси x . Для всех потоков вдоль оси x выкладки будут аналогичны.

$$M_{xL/R} = \begin{cases} M_{xL}, & M_x \geq 0 \\ M_{xR}, & M_x < 0 \end{cases}$$

Необходимо разделить конвективную скорость M_x на «левый» M_{xL}^+ и «правый» M_{xR}^- потоки. Будем искать функции M_{xL}^+ и M_{xR}^- , удовлетворяющие следующим условиям:

1. $M_x = M_{xL}^+ + M_{xR}^-$;
2. $M_{xL}^+ \geq 0$, $M_{xR}^- \leq 0$;
3. $M_{xL}^+(M_x) = -M_{xR}^-(-M_x)$;
4. $M_{xL}^+ = M_x$, $M_x \geq 1$; $M_{xR}^- = M_x$, $M_x \leq -1$;
5. Функции непрерывны и монотонно возрастают;
6. Функции непрерывно дифференцируемы

Используя четвертое условие получим следующее выражение:

$$M_{xL/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} (M_x \pm |M_x|), & |M_x| \geq 1; \\ g(M_x), & |M_x| < 1. \end{cases}$$

Разделяющую функцию $g(M_x)$ ищем как многочлен наименьшей степени. Используя шестое условие и значение $M_{xL/R}^\pm$ в случае $M_x = \pm 1$, находим:

$$g^\pm = \pm \frac{1}{4} (M_x \pm 1)^2$$

И в итоге получаем:

$$M_{xL/R}^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}(M_x \pm |M_x|), & |M_x| \geq 1; \\ \pm \frac{1}{4}(M_x \pm 1)^2, & |M_x| < 1. \end{cases}$$

2.3 Разделение компрессионных потоков

Аналогично, давление p_x разделяется на потоки «слева» и «справа»:

$$p_x = \pi_{xL}^{+} + \pi_{xR}^{-}$$

Будем искать функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $p_x = \pi_{xL}^{+} + \pi_{xR}^{-}$;
2. $\pi_{xL}^{+} \geq 0$, $\pi_{xR}^{-} \geq 0$;
3. $\pi_{xL}^{+}(M_x) = \pi_{xR}^{-}(-M_x)$;
4. $\pi_{xL}^{+} = p_x$, $M_x \geq 1$; $\pi_{xR}^{-} = p_x$, $M_x \leq -1$;
5. Функции непрерывны, π_{xL}^{+} монотонно возрастает, π_{xR}^{-} монотонно убывает;
6. Функции непрерывно дифференцируемы.

Аналогичным примененному в случае конвективных потоков способом получим:

$$\pi_{xL/R}^{\pm} = \begin{cases} \frac{p_x}{2} (1 \pm \text{sign}(M_x)), & |M_x| \geq 1; \\ p_x \pm \frac{1}{4}(M_x \pm 1)^2 (2 \mp M_x), & |M_x| < 1. \end{cases}$$

3. Решение тестовой задачи

В прямоугольную область длины L и ширины H , заполненную изначально потоком машин с плотностью $\rho = \rho_0$ из которых $\rho_1 = \rho_2 = \frac{\rho_0}{4}$, $\rho_2 = \frac{\rho_0}{2}$ и движущуюся с начальной скоростью $u = u_0$, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, начинает поступать поток машин через правую границу.

Граничные условия при $x=0$: $\rho_i u = q_i$ и $q_1 = q_2 = \frac{q_0}{4}$, $q_2 = \frac{q_0}{2}$.

Граничные условия при $x=L$ зависят от скорости потока:

если $u < k$, $\frac{\partial \rho_i u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \rho_i u_i}{\partial y} = 0$, $i = 1, 2, 3$

при $u \geq k$ граничное условие не ставится. Такое условие представляет собой условие свободного выхода.

Численное решение задачи производится с помощью метода AUSM. Остальные параметры даны ниже:

Сетка состоит из $N_x = 201$ ячеек по горизонтали и $N_y = 21$ ячеек по вертикали.

$T = 90$ с – время расчета;

$L = 150$ м – длина расчетной области;

$H = 10$ м – ширина расчетной области;

$l_m = 50$ м – характерное расстояние начала маневра перед перекрестком;

$l_s = 50$ м – характерное расстояние начала торможения перед светофором;

$\tau_0 = 3$ с – характерное время реакции на изменение сигнала светофора;

$\rho_0 = 0.01$ – начальная плотность;

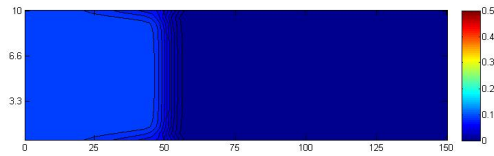
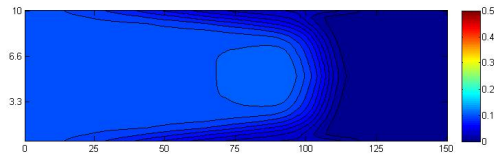
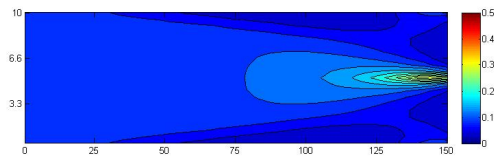
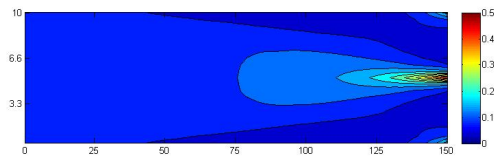
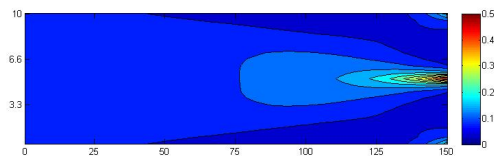
$u_0 = 10.0$ м/с – начальная скорость потока;

$v_{max} = 20$ м/с – максимальная разрешенная скорость движения;

$k = 8$ м/с – скорость распространения малых возмущений («скорость звука») вдоль оси x ;

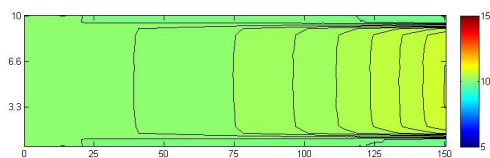
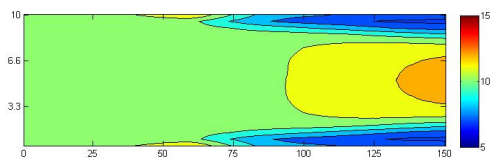
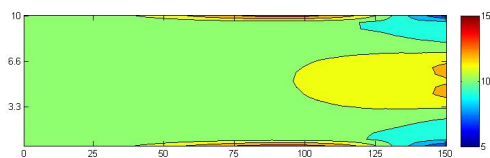
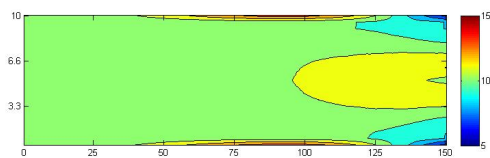
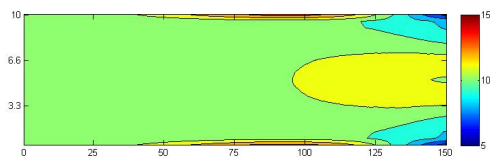
$A = 6$ м/с – аналог коэффициента k вдоль оси y ;

$q_0 = 1$ – поток через левую границу.

**Рис. 3.** плотность ρ , $T=5s$ **Рис. 4.** плотность ρ , $T=10s$ **Рис. 5.** плотность ρ , $T=15s$ **Рис. 6.** плотность ρ , $T=20s$ **Рис. 7.** плотность ρ , $T=90s$

Полученные результаты представлены в виде картин компонент плотности и скорости в различные моменты времени.

Как можно видеть из рис. 3-12, картины плотности и скорости не меняются после

Рис. 8. скорость u , $T=5c$ Рис. 9. скорость u , $T=10c$ Рис. 10. скорость u , $T=15c$ Рис. 11. скорость u , $T=20c$ Рис. 12. скорость u , $T=90c$

момента $T = 20c$. Это, приблизительно, время, требуемое чтобы покрыть расстояние L со скоростью k . Узкие полосы повышенной скорости на рис. 10-12, предположительно, следствие пониженной плотности из-за перестроений. Кроме того, на рис. 13-15

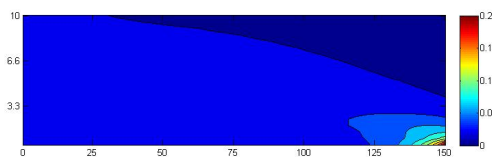


Рис. 13. плотность ρ_1 потока, поворачивающего направо. $T=90c$

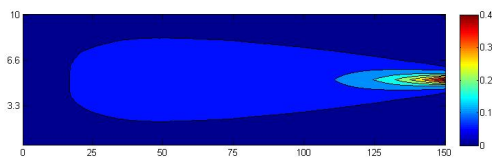


Рис. 14. плотность ρ_2 потока, движущегося прямо. $T=90c$

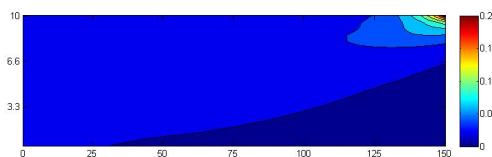


Рис. 15. плотность ρ_3 потока поворачивающего налево. $T=90c$

показаны плотности отдельных компонент потока. Ввиду симметричной постановки начальных и граничных условий ρ_1 и ρ_3 зеркально симметричны друг относительно друга.

Далее представлено качественное сравнение полученных результатов с данными наблюдений. Изображенной на рис.16 ситуации соответствует картина распределения плотности ρ_3 , спустя некоторое время после того как движение влево было открыто.

Как видно из рис.16 показывающей трёхполосную дорогу, поворачивающие налево автомобили сконцентрированы в левой полосе перед перекрестком и далее распределяются по средней и правой полосе, как это показано на рис.15 для аналогичных условий.

Выводы

Представлена математическая модель моделирования движения транспортных потоков на многополосных автомагистралях с учетом необходимости перестроений. Полученные результаты показывают наличие перпендикулярных направлению движения потоков транспорта, вызванных необходимостью перестроения и повышающих плотность и понижающих скорость в районе выходной границы. Эти потоки уравниваются потоками, вызванными перепадами плотности. В результате поля определяющих характеристик транспортного потока (скорости, плотности) приходят к установившемуся виду примерно за характерное время, равное времени прохождения рассматриваемого сегмента дороги со скоростью малых возмущений.

Благодарности

Работа написана при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант 18-07-00518).



Рис. 16. Изображение автомобилей, поворачивающих налево сделанное спустя некоторое время после открытия пути прямо и направо и сразу после открытия пути налево

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M.J., Whitham J.* On kinetic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. of the Royal Society. Ser. A. No. 1178. Vol. 229. London, 1955. 317-345.
2. *Richards P.L.* Shock waves on the highway. Operations Research. 1956. Vol. 4. 42-51.
3. *Payne, H.J.* Models of freeway traffic and control. Mathematical Model of Public Systems, Simulation Council Proc. La Jolla California 1, 51–61(1971)
4. *Helbing, D. and Treiber, M.* Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition. Phys. Rev. Lett., **81**, 3042–3045(1998)
5. *Hoogendoorn, S.P. and Bovy, P.H.L.* Continuum modeling of multiclass traffic flow. Transp. Res. Part B, **34**(2), 123–146(2000)
6. *Kerner, B. S. and Konhäuser, P.* Cluster effect in initially homogeneous traffic flow. Phys. Rev. E, **48**, 2335–2338(1993)
7. *Greengard, J.M.* Congestion redux. SIAM J. Appl. Math., **64**(4), 1175–1185(2004)
8. *Borsche, R., Kimathi, M. and Klar, A.* A class of multi-phase traffic theories for microscopic, kinetic and continuum traffic models. Computers and Mathematics with Applications, **64**, 2939–2953(2012)
9. *Lebacque, J.P., Mammar, S. and Haj-Salem, H.* Generic second order traffic flow modelling in: Transportation and Traffic Theory, edited by R.E. Allsop, and G.H. Benjamin, Elsevier, Oxford, 755–776(2007)
10. *Lebacque, J.P. and Khoshyaran, M. M.* A variational formulation for higher order macroscopic traffic flow models of the gsom family. Transp. Res. Part B, **57**, 245–265(2013)

11. *Greenberg H.* An analysis of traffic flow. *Operations Research*. 1959. Vol. 7. 79-85.
12. *Helbing, D.* Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 1067–1141(2001)
13. *Nagatani, T.* The physics of traffic jams. *Rep. Prog. Phys.*, **65**, 1331–1386(2002)
14. *Brackstone, M., Mcdonald, M.* Car-following: a historical review. *Transp. Res. Part F*, **2**, 181–196(1999)
15. *Nagel, K. and Schreckenberg, M.* A cellular automaton model for freeway traffic. *J. De Phys. I*, **2** (12), 2221–2229(1992)
16. *Helbing, D. and Huberman, B.A.* Coherent moving states in highway traffic. *Nature*, **396** (6713), 738–740(1998)
17. *Chowdhury, D. Santen, L. and Schadschneider, A.* Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Physics Reports*, **329**, 199–329(2000)
18. *D. Ngoduy, M.J. Maher,* Calibration of second order traffic models using continuous cross entropy method, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Volume 24, 2012, Pages 102-121, ISSN 0968-090X, <https://doi.org/10.1016/j.trc.2012.02.007>.
19. *Liang Zheng, Zhengbing He & Tian He.* An anisotropic continuum model and its calibration with an improved monkey algorithm. *Transportmetrica A: Transport Science* Vol. 13 , Iss. 6, 2017
20. *M. P. Raadsen and M. C. Bliemer.* Continuous-time general link transmission model with simplified fanning, part ii: Event-based algorithm for networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2018.
21. *J. Du, H. Rakha, and V. V. Gayah.* Deriving macroscopic fundamental diagrams from probe data: Issues and proposed solutions. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 66:136–149, 2016.
22. *S. Fan, Y. Sun, B. Piccoli, B. Seibold, and D. B. Work.* A Collapsed Generalized Aw-Rascle-Zhang Model and Its Model Accuracy. *ArXiv eprints*, Feb. 2017.
23. *A. K. Gupta & V. K. Katiyar, A New Multi-class Continuum Model For Traffic Flow,* *Transportmetrica* Vol. 3, Iss. 1, 2007
24. *Liang Zheng, Peter J. Jin, Helai Huang,* An anisotropic continuum model considering bi-directional information impact, *Transportation Research Part B: Methodological*, Volume 75, 2015, Pages 36-57, ISSN 0191-2615, <https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.02.011>.
25. *Nagatani T.* Bunching transition in a time-headway model of a bus route // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 296, № 1-2. P.320-330.
26. *С. А. Регирер, Н. Н. Смирнов, А. Е. Ченчик,* “Математическая модель взаимодействия движущихся коллективов: общественного транспорта и пассажиров”, *Автомат. и телемех.*, 2007, № 7, 116–131.
27. *А. Б. Сухинова, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чурбанова,* “Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков”, *Матем. моделирование*, 21:2 (2009).
28. *Ngoduy, D.* Application of gas-kinetic theory to modelling mixed traffic of manual and adaptive cruise control vehicles. *Transportmetrica Part A: Transport Science* **8**(1), 43–60(2012)
29. *Ngoduy, D.* Platoon-based macroscopic model for intelligent traffic flow. *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, **1**(2), 153–169(2013)
30. *Li, J. and Zhang, H.M.* The variational formulation of a non-equilibrium traffic flow model: theory and implications. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, **80**, 327–340(2013)

31. Zhu, Z.J. and Yang, C. Visco-elastic traffic flow model. J. Advanced Transp., **47**, 635–649(2013)
32. Tordeux, A., Roussignol, M., Lebacque, J.P. and Lassarre, S. A stochastic jump process applied to traffic flow modelling. Transportmetrica A: Transport Science, **10**(4), 350–375(2014)
33. Costeseque, G. and Lebacque, J.P. A variational formulation for higher order macroscopic traffic flow models: Numerical investigation. Transp. Res. Part B, **70**, 112–133(2014)
34. Bogdanova, A.I., Smirnova, M.N., Zhu, Z.J. and Smirnov, N.N. Exploring peculiarities of traffic flows with a viscoelastic model. Transportmetrica A: Transport Science, **11**(7), 561– 578(2015)
35. Smirnova, M.N., Bogdanova, A.I., Zhu, Z.J., Smirnov, N.N. Traffic flow sensitivity to viscoelasticity. Theoretical and Applied Mechanics Letters, **6**, 182–185(2016)
36. Smirnova, M.N., Bogdanova, A.I., Zhu, Z.J. and Smirnov, N.N. Traffic flow sensitivity to parameters in viscoelastic modelling. Transportmetrica B: Transport Dynamics, **5**(1), 115– 131(2017)
37. Zhang, Y.L., Smirnova, M.N., Bogdanova, A.I., Zhu, Z.J. and Smirnov, N.N. Travel time estimation by urgent-gentle class traffic flow model. Transp. Res. Part B **113**, 121–142(2018)
38. Kumar, B.A., Vanajakshi, L., Subramanian, S.C. Bus travel time prediction using a timespace discretization approach. Transp. Res. Part C **79**, 308–332(2017)
39. Ladino, A., Kibangou, Y., Canudas de Wit, C., Fourati, H. Travel time prediction and departure time adjustment behavior dynamics in a congested traffic system. Transp. Res. Part C **80**, 216–238(2017)
40. Ma, Z.L., Koutsopoulos, H.N., Ferreira, L., Mesbah, M. Estimation of trip travel time distribution using a generalized markov chain approach. Transp. Res. Part C **74**, 1–21(2017)
41. Rahmani, M., Koutsopoulos, H.N., Jenelius, E. Travel time estimation from sparse floating car data with consistent path inference: a fixed point approach. Transp. Res. Part C **85**, 628–643(2017)
42. Smirnov N.N. Kiselev A.B., Nikitin V.F., Yumashev M.V. Mathematical modelling of traffic flows. Proc. 9th IFAC Symposium Control in Transportation Systems 2000, Braunschweig, 2000.
43. А. Б. Киселев, В. Ф. Никитин, Н. Н. Смирнов, and М. В. Юмашев. Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали. Прикладная математика и механика, 64(4):671–678, 2000.
44. Н. Н. Смирнов, А. Б. Киселев, В. Ф. Никитин, А. В. Кокорева Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Труды Московского физико-технического института. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 152–162.
45. Н. Н. Смирнов, А. Б. Киселев, В. Ф. Никитин, М. В. Юмашев / Математическое моделирование автомобильных потоков на магистралях. Вестник Московского университета. Серия I: Математика. Механика. — 2000. — № 4. — С. 39–44..
46. А. Б. Киселев, А. В. Кокорева, В. Ф. Никитин, Н. Н. Смирнов Математическое моделирование автотранспортных потоков на регулируемых дорогах // Прикладная математика и механика. — 2004. — Т. 68, № 6. — С. 1047–1054
47. John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher. Computational fluid mechanics and heat transfer. // Taylor & Frances, 1997. – 792 p.

ЗАВИСИМОСТЬ РОСТА ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗАКАЧКИ

Пестов Д. А., Акулич А. В.

ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, dmitr-ey94@mail.ru, disser_2010@mail.ru

В статье представлен анализ зависимости решения задачи роста трещины гидроразрыва от параметров задачи. Для иллюстрации зависимости от параметров представлены результаты численного моделирования для модели плоской трещины с утечкой жидкости в породу. Обнаруженные качественные зависимости не меняются при некоторых усложнениях модели а также могут быть использованы на практике.

Ключевые слова: гидроразрыв, рост трещины, утечка, безразмерные коэффициенты.

Введение

Гидроразрыв на данный момент является основным способом интенсификации добычи нефти и газа в низкопроницаемых коллекторах. Для успешного проведения гидроразрыва получаемая трещина должна точно соответствовать некоторым критериям: её длина должна быть достаточно большой для увеличения продуктивной площади, раскрытие должно быть достаточным, чтобы в неё мог попасть проппант, необходимый для того, чтобы трещина не закрылась по завершении процесса. При этом количество параметров, на которые можно повлиять при проведении гидроразрыва ограничено вязкостью жидкости гидроразрыва, закачиваемым объёмом, а также скоростью закачки.

Основные уравнения

Рассмотрим плоскую вертикальную трещину, раскрытие которой много меньше её длины и высоты. В трещину с заданным расходом Q подаётся вязкая несжимаемая жидкость. Породу считаем пористой, проницаемой и линейно упругой. В таком случае закон сохранения массы для жидкости гидроразрыва примет следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega v}{\partial x} + 2 \cdot u_{leak} = 0 \quad (1)$$

где ω – раскрытие трещины, v – средняя по сечению скорость движения жидкости в трещине, а u_{leak} – скорость утечки жидкости гидроразрыва сквозь стенки трещины. Предположим что утечка жидкости в породу происходит в каждом сечении независимо и воспользуемся законом Дарси в одномерной постановке, который после интегрирования предстанет в виде:

$$u_{leak} = \frac{K \cdot p_{net}}{\mu \cdot \Gamma}$$

$$u_{leak} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

Который далее заменим на более удобный

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{K \cdot p_{net}}{\mu \cdot \Gamma} \quad (2)$$

Здесь Γ – глубина проникновения жидкости гидроразрыва в породу, μ – вязкость жидкости гидроразрыва, а p_{net} – разница между давлением жидкости гидроразрыва и пластовым давлением. Уравнение (1) соответственно примет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega v}{\partial x} + 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Далее, ввиду высокой вязкости подаваемой жидкости и малого раскрытия пренебрежем инерционными членами в уравнении движения. Тогда если считать жидкость гидро-разрыва ньютоновской, уравнение движения примет следующий вид.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu v}{w^2} \quad (4)$$

Для неньютоновской жидкости следует заменить правую часть в уравнениях (2,4). Выводы, получаемые далее справедливы и в этом случае, но для удобства будут приведены в конце в качестве примечания.

Для замыкания системы уравнений необходимо задать связь раскрытия трещины с давлением. Для этого можно включить в систему уравнения равновесия и закон Гука для случая плоской деформации [1-5] а также добавив граничные условия: приравняв смещения на границе трещины к половине раскрытия и поставив условие что напряжения $\sigma_{yy} = \sigma_z - p = -p_{net}$ на границе трещины (σ_z – минимальное главное напряжение на бесконечности, поскольку трещина распространяется перпендикулярно ему). Вместо этого используем решение задачи упругости для среды с плоским разрывом [6]

$$p = \sigma_z - \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{-L}^L \frac{w(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi \quad (5)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, а G – модуль сдвига. σ_z представляет собой в данном случае минимальное главное напряжение, но в случае неоднородности напряжений в среде его можно заменить на напряжения $\sigma_{yy}^0(x)$ – соответствующие отсутствию трещины [7].

Последним уравнением будет критерий распространения трещины, а именно равенство коэффициента интенсивности напряжений критическому значению, а именно трещиностойкости породы. Для определения коэффициента интенсивности напряжений воспользуемся известной для плоских трещин формулой:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-L}^L p_{net} \sqrt{\frac{L+\xi}{L-\xi}} d\xi$$

Таким образом последнее уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-L}^L p_{net} \sqrt{\frac{L+\xi}{L-\xi}} d\xi = K_{IC} \quad (6)$$

Для завершения постановки задачи остаются только граничные условия на скорость жидкости в центре трещины,

$$v_0(t) = w_0(t) * Q; \text{ при } x = 0 \quad (7)$$

где $Q = Q_0/2$ – половина расхода, и условия на давление в кончике трещины, вернее на передней границе жидкости $x = L_f$, которая определяется из закона сохранения объёма.

$$p(x) = 0, \text{ при } x = L_f. \quad (8)$$

$$\int_0^t Q dt = \int_0^{L_f} w(x) dx + 2 \cdot \int_0^L \Gamma(x) dx. \quad (9)$$

Таким образом, задача распространения трещины гидроразрыва состоит в решении уравнений (2-5) при условиях (6-9).

Анализ уравнений

Задача роста трещины гидроразрыва отличается от многих задач механики не только тем, что требует одновременного решения как задачи движения жидкости, так и задачи упругости, но и трудностью определения характерного размера задачи, поскольку длина и раскрытие трещины в начале процесса на порядки меньше таковых после завершения закачки. Для анализа уравнений обезразмерим их, используя доступные нам параметры задачи. Из размерных параметров нам доступны следующие:

- расход жидкости Q ,
- конечный объём закачки V ,
- вязкость жидкости гидроразрыва μ
- коэффициент проницаемости K ,
- модуль сдвига G ,
- коэффициент трещиностойкости K_{IC} .

При этом фактически последние три являются фиксированными для каждого конкретного проведения гидроразрыва, поскольку являются характеристиками породы в которой происходит гидроразрыв, а на первые три параметра мы можем влиять. Конечный объём закачки взят в качестве параметра, поскольку процесс гидроразрыва всегда конечен и стоимость его проведения напрямую зависит от закачанного объёма жидкости гидроразрыва. Кроме того, это позволяет нам установить характерный размер задачи.

Перед обезразмериванием уравнений следует отметить что в нашей постановке как расход жидкости, так и конечный объём являются удельными, то есть расходом и объёмом на единицу высоты трещины и имеют размерности $\text{м}^2/\text{с}$ и м^2 соответственно. Таким образом будем использовать следующие безразмерные переменные:

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{V}}, \quad y^* = \frac{y}{\sqrt{V}}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{\sqrt{V}}, \quad L^* = \frac{L}{\sqrt{V}}, \quad \Gamma^* = \frac{\Gamma}{\sqrt{V}}$$

$$t^* = t \cdot \frac{Q}{V}, \quad v^* = v \frac{\sqrt{V}}{Q}$$

$$p^* = \frac{p}{G}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{G};$$

Система уравнений (2-7) таким образом примет вид:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \omega^* v^*}{\partial x^*} + 2 \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t^*} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial t^*} = \frac{p_{net}^*}{\Gamma^*} \cdot \frac{KG}{\mu Q} \quad (11)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = - \frac{12v^*}{\omega^{*2}} \cdot \frac{\mu Q}{GV} \quad (12)$$

$$p^* = \sigma_3^* - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_{-L^*}^{L^*} \frac{\omega^*(\xi)}{(x^* - \xi)^2} d\xi \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi L^*}} \int_{-L^*}^{L^*} p_{net}^* \sqrt{\frac{L^* + \xi}{L^* - \xi}} d\xi = \frac{K_{IC}}{G \cdot V^{\frac{1}{4}}} \quad (14)$$

$$v_0^* = w_0^*, \text{ при } x^* = 0 \quad (15)$$

Легко заметить, что во всех уравнениях, куда входит расход жидкости Q , он входит в произведении с вязкостью жидкости. Таким образом на процесс гидроразрыва влияет не сама вязкость жидкости или её расход, а их произведение. Причем, как было отмечено в [8], это влияние немонотонно, поскольку большее значение приводит большему сопротивлению жидкости при движении по трещине (12), что замедляет рост трещины, а меньшее значение приводит к большим утечкам в породу (11), что также может замедлять рост трещины.

Рис.1 и Рис.2 демонстрируют описанные выше эффекты. На первом представлены зависимости длины трещины от текущего объема закачки при различных значениях расхода и вязкости при фиксированном конечном объеме закачки, на втором же значения длины трещины при определенном объеме закачки для нескольких экспериментов.

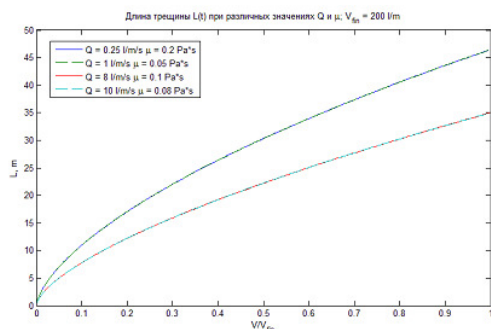


Рис. 1. Рост трещины при двух различных значениях $Q\mu$

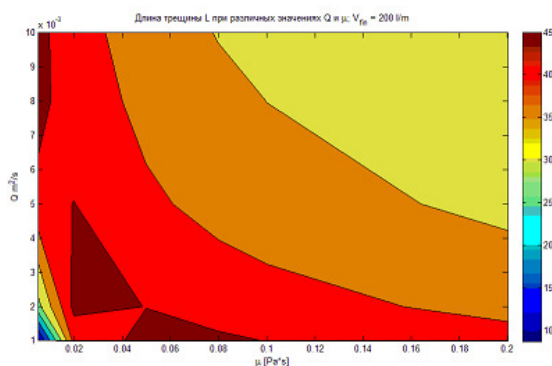


Рис. 2. Зависимость конечной длины от вязкости и расхода

Из первого графика видно что при одном значении $Q \cdot \mu$ и заданном конечном объеме

рост трещины не зависит отдельно от значений Q или μ . На втором же графике видно, что зависимость длины от этого параметра немонотонная причем после достижения максимума для заданного объёма, дальнейшее уменьшение этого параметра ведёт к резкому уменьшению конечной длины трещины вследствие утечек в породу.

Выводы

Задача роста трещины гидроразрыва обладает двумя параметрами, существенно влияющими на этот процесс и при этом доступными для изменения на практике: конечным объёмом закачки и произведение вязкости жидкости гидроразрыва на расход. При этом, немонотонность влияния второго параметра на конечный результат позволяет ставить задачу оптимизации, для достижения оптимального соотношения длины и раскрытия при условии ограничений на параметры жидкости или расход. То, что на результат влияет не сама вязкость или расход, а их произведение, позволяет при нахождении оптимального для заданных условий значения этого произведения выбрать наиболее подходящие значения вязкости или расхода из практических соображений.

Примечания

Случай неньютоновской жидкости

Для случая неньютоновской жидкости у нас меняются уравнения движения (4) и утечки (2). Для степенной жидкости эти уравнения будут выглядеть так:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{\mu \cdot Q^n}{w^{n+1}}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = (12 \cdot K)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{p_{net}}{M' \cdot \Gamma} \right)^{\frac{1}{n}}$$

где $M' = \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \mu$ – эффективный показатель вязкости. Соответственно безразмерные уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \Gamma^*}{\partial t^*} \right)^n = \frac{(12 \cdot)^{\frac{n+1}{2}} n^n}{2^{n+1}(2n+1)^n} \left(\frac{p_{net}^*}{\Gamma^*} \right) * \left(\frac{K^{\frac{n+1}{2}} G}{Q^n \mu V^{\frac{1-n}{2}}} \right)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = - \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{v^{*n}}{w^{*n+1}} \cdot \frac{\mu Q^n}{GV^n}$$

Легко заметить, что теперь в обоих уравнениях присутствует произведение $\mu \cdot Q^n$, которое и будет выполнять роль параметра μQ для степенной жидкости. Полученные выводы при этом не меняются.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-07-00513а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Smirnov N. N., Kisselev A. B., Nikitin V. F., Smirnova M. N., Tyurenkova V. V. Underground Hydraulic Fracturing Technology Computer Simulations // Proc. The IACGE International Symposium on Geotechnical and Earthquake Engineering (IACGE-2016). BEIJING, China. October 11–13. 2016. P. 194–202.
2. Акулич А. В., Звягин А. В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // Изв. Рос. академии наук. Сер. Механика жидкости и газа. 2008. No 3. С. 104–112.

3. Акулич А. В., Звягин А. В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. No 1. С. 43–49.
4. Богданов А. В., Звягин А. В., Тьерсилен М. Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2004. No 6. С. 44–49.
5. Акулич А. В., Смирнов Н. Н., Тюренкова В. В., Лапко А. В., Галкин В. А. Математическое моделирование распространения трещины гидроразрыва пласта. Сургут : ИЦ СурГУ, 2016. 123 с.
6. Crouch S. L., Starfield A. M. Boundary element methods in solid mechanics. London; Boston: Allen & Unwin, 1983. 322 p.
7. Фундаментальные аспекты численного моделирования трещины гидроразрыва / Д. А. Пестов, А. В. Акулич, А. В. Звягин и др. // Вестник кибернетики. — 2018. — Т. 32, № 4.
8. Математическое моделирование задачи распространения трещины гидроразрыва / Д. А. Пестов, Н. Н. Смирнов, А. В. Акулич, В. В. Тюренкова // Вестник кибернетики. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 80–92.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Никитин В. Ф., Михальченко Е. В., Стамов Л. И.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Российской
академии наук», г. Москва,
vfnikster@gmail.com, MikhachenkoLena@yandex.ru, lyubenstamov@mail.ru*

На основе авторского кода было проведено 3D численное моделирование камеры сгорания двигателя с вращающейся детонационной волной (RDE). RDE - это новый тип двигателей, способных создавать более высокую тягу, чем традиционные, основанные на процессе дефлаграции горючей смеси. Динамический процесс сгорания в RDE происходит более чем в 1000 раз быстрее, чем в случае обычного медленного сгорания. Этот тип двигателя обладает более эффективной тепловой динамикой.

Рассматриваемая камера сгорания представляет собой коаксиальный полый цилиндр. Топливо впрыскивается с одной стороны, либо предварительно смешано с окислителем, либо из отдельных форсунок. Поджиг смеси в камере осуществляется рядом с инжекторами, что приводит к образованию самоподдерживающейся детонационной волны, которая затем вращается, потребляя свежую горючую смесь. Сгоревшие газы расширяются в центральной части камеры, где внутреннее полое тело изменяется от цилиндра к конусу, а затем истекают. После расширения они покидают камеру со стороны, противоположной инжекторам. Первичное воспламенение моделируется источником энергии, достаточно сильным, чтобы произвести мгновенную детонационную волну.

Расчеты основаны на системе уравнений Навье - Стокса, а также на уравнениях для моделирования турбулентности и химической кинетики.

Ключевые слова: математическое моделирование, детонация, дефлаграция, двигатель с вращающейся детонацией, прямоточный реактивный двигатель (ПВРД).

NUMERICAL STUDY OF DETONATION ENGINES

Nikitin V. F., Mikhhalchenko E. V., Stamov L. I.

Moscow M.V. Lomonosov State University, Moscow, Russia

Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

vfnikster@gmail.com, MikhhalchenkoLena@yandex.ru, lyubenstamov@mail.ru

3D numerical modeling of a rotating detonation engine (RDE) combustion chamber is performed based on the original code. The RDE is a new type of engines capable to create higher thrust than the traditional ones based on the combustible mixture deflagration process. The dynamical process of combustion in the RDE is more than 1000 times fast than in case of usual slow combustion. This type of an engine has more efficient thermal dynamics.

The combustion chamber under consideration is a co-axial hollow cylinder. The fuel is injected from one side, either premixed with the oxidizer, or from separate injectors. It is ignited in the chamber near the injectors, and this invokes the self-sustaining detonation wave which is then rotates consuming the combustible mixture. The burnt gases are expanded in the central part of the chamber where the internal hollow body changes from cylinder to cone. After the expansion, they leave the chamber from the side opposite to the injectors. The primary ignition is modeled by an energy source strong enough to produce an instant detonation wave.

The calculations are based on the Navier – Stokes system of equations along with the equations for turbulence modeling and the chemical kinetics.

Keywords: Mathematical Modeling, Detonation, Deflagration, RDE, Ramjet.

Обозначения

E_k – внутренняя энергия единицы моля компонента

E_T – полная внутренняя энергия единицы объёма

H – энтальпия на единицу объема

$\hat{H}_k$ – безразмерная энтальпия компоненты

$J_{k,j}$ – компоненты вектора диффузионного потока компонента

$J_{T,j}$ – компоненты вектора потока тепловой и химической энергии

K – кинетическая энергия турбулентных пульсаций на единицу массы

$k_{F,r}$ – коэффициент скорости прямой реакции

$k_{B,r}$ – коэффициент скорости обратной реакции

M_f – коэффициент влияния неизменяемых компонентов

N_C – количество компонент

p – давление смеси

P_T – производство энергии турбулентности

Pr – число Прандтля

Pr_T – турбулентное число Прандтля

$\dot{Q}$ – интенсивность притока тепловой энергии из внешнего источника

R_G – универсальная газовая постоянная

$\hat{S}_k$ – безразмерная энтропия компонента k

Sc – число Шмидта

Sc_T – турбулентное число Шмидта

t – время

T – температура

u_j – компоненты вектора скорости газа

W_k – масса моля компонента k
 x_j – пространственные координаты
 X_k – молярная плотность компонента k
 Y_k – массовая доля компонента k
 $\alpha_{r,k}$ – степени компонент в прямой реакции
 $\beta_{g,k}$ – степени компонент в обратной реакции
 $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера
 μ – молекулярная вязкость
 μ_T – турбулентная вязкость
 $\nu_{r,k}$ – алгебраический стехиометрический коэффициент компонента в реакции
 ρ – плотность смеси
 ρ_k – парциальная плотность компонента k
 $\sigma, \sigma^*, \beta, \beta^*, \alpha$ – параметры модели Уилкоккса
 $\tau_{i,j}$ – компоненты тензора вязких и турбулентных напряжений
 $\tau_{i,j}^T$ – турбулентная часть тензора напряжений
 ϕ_{km} – коэффициент взаимного влияния компонент
 ω – интенсивность затухания турбулентной энергии
 $\dot{\omega}_k$ – химические источники
 $\hat{\omega}_k$ – интенсивность производства одного моля компонента k в единице объема.
 ω_r – скорость (интенсивность) реакции g
 g – количество реакций

Введение

В настоящее время большой интерес представляет исследование и разработка детонационных двигателей. Эффективность современных двигателей, основанных на традиционной схеме (цикл Брайтона), сейчас близка к своему технологическому пределу. Тяговые характеристики двигателей могут быть увеличены только с использованием новых технических решений [1]. За последние 20 лет было проведено значительное количество исследований по разработке двигателей, использующих детонационные волны для силовых установок, вплоть до разработки и испытаний двигательных систем [2,4,5]. В отличие от других типов детонационных двигателей, двигатель с вращающейся детонационной волной (RDE) использует другой подход к обеспечению эффективности детонационного цикла [3].

RDE использует высокоэффективный режим детонации для организации процесса сгорания в камере. Топливо и окислитель впрыскиваются в камеру сгорания на одном конце, и одна или несколько детонационных волн распространяются по окружности в камере сгорания, потребляя свежую смесь. Продукты покидают камеру сгорания с другого конца с высокой осевой скоростью, создавая тягу [7]. По сравнению с импульсными детонационными двигателями (PDE), RDE может работать непрерывно после запуска, и рабочая частота RDE намного выше, чем у PDE. Кроме того, RDE имеет компактную конфигурацию и может работать в широком диапазоне чисел Маха. Поэтому RDE получил большое внимание в области исследований детонационных двигательных установок.

История исследований началась еще в 1960-х годах, когда Войцеховский с соавторами реализовали непрерывную вращающуюся детонацию C_2H_2 / O_2 в экспериментальной установке в форме диска [8]. Николс с соавторами [9] выполнили технико-экономические обоснования детонационного ракетного двигателя и реализовали короткую непрерывную детонацию в кольцевой камере сгорания. После этого многие коллективы авторов проводили экспериментальные и численные исследования RDE. Быковский с соавторами [10-13] реализовали вращающуюся детонацию в кольцевых

камерах разных размеров и конфигураций с использованием различных видов топлива. В [14] проводились экспериментальные исследования диапазонов параметров давления в камере и конфигураций, в которых детонационные волны могут распространяться стабильно.

В работе [15] проведено двумерное численное моделирование вращения детонационной волны в смеси водород / кислород и проанализирован механизм распространения детонации. Лю с соавторами была экспериментально реализована вращающаяся детонационная волна в смеси H_2 / воздух в кольцевой камере [16] и проанализированы характеристики распространения вращающейся волны детонации вблизи рабочей границы [17]. В [18] численно исследовали влияние ширины выхода инжектора на RDE; было обнаружено, что смешивание горячих продуктов детонации и вновь вводимой горючей смеси может побудить новые волны детонации изменить режим распространения в камере сгорания. Тяговые характеристики - одна из главных проблем исследования RDE. Shao с соавторами [19, 20] изучали влияние различных конфигураций сопел на тяговые характеристики и обнаружили, что сопло Лавала имеет некоторые преимущества по сравнению с другими конфигурациями сопел. В [21] выполнили численное трехмерное моделирование RDE для водородно-кислородной смеси, используя детальную химическую модель: 9 компонент и 19 реакций. Обнаружили, что влияние разрешения сетки и ширины кольца на удельный импульс незначительны. Удельный импульс для двухволнового RDE уменьшается примерно на 10%, чем для одноволнового RDE. В [22] модифицировали двумерное моделирование Эйлера, включая коэффициенты смешивания, для имитации несовершенного перемешивания впрыскиваемых потоков реагентов. Вопреки ожиданиям, микширование оказывает минимальное влияние на производительность. В работе [23] разработали метод моделирования поля внутреннего потока в RDE с использованием теории ударного расширения в сочетании с устойчивым 2D изэнтропическим методом характеристик. Было показано, что метод характеристик способен обеспечить полезные прогнозы производительности наравне с традиционными моделями Эйлера и при значительно меньших вычислительных затратах. Фотия с соавторами [24] экспериментально проверили RDE с различными конфигурациями форсунок, измеряя двигательную способность с точки зрения тяги и удельного импульса. В [25] рассматривается трехмерное нестационарное течение с вращающейся детонационной волной, возникающей в кольцевом зазоре осесимметричного двигателя между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными его оси симметрии. В работах [26, 27] выполнено 3D-моделирование RDE с применением полных уравнений Навье – Стокса с моделями турбулентности и микросмешивания при подаче компонентов через форсунки. В работе [28] автор стремится применять метод инжекции через массив отверстий в трехмерном численном моделировании двигателя с вращающейся детонационной волной. Расчет основывался на уравнениях Эйлера в сочетании с одношаговой химической моделью Арренюса.

2. Математическая модель

Математическая модель содержит определяющие уравнения (дифференциальные и алгебраические), граничные и начальные условия.

2.1 Уравнения баланса

Для моделирования многокомпонентной газовой смеси мы используем следующую систему уравнений баланса

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_k u_j) - \frac{\partial J_{k,j}}{\partial x_j} = \dot{\omega}_k, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((E_T + p) u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{T,j} + u_i \tau_{i,j}) = \dot{Q} \quad (3)$$

2.2 Дополнительные алгебраические соотношения

$$\rho = \sum_{k=1}^{N_C} \rho_k, Y_k = \frac{\rho_k}{\rho}, X_k = \frac{\rho_k}{W_k}. \quad (4)$$

$$p = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho K, \bar{p} = R_G T \sum_{k=1}^{N_C} X_k. \quad (5)$$

Общая энергия единицы объема равна следующей сумме:

$$E_T = E + \rho \frac{u^2}{2} + \rho K, u^2 = u_j u_j. \quad (6)$$

Таким образом, полная энергия представляет собой сумму внутренней (тепловой и химической) энергии, кинетической и турбулентной энергии. Внутренняя энергия единицы объема моделируется следующим образом:

$$E = \sum_{k=1}^{N_C} X_k E_k(T) = R_G T \sum_{k=1}^{N_C} X_k \cdot (\hat{H}_k(T) - 1). \quad (7)$$

Здесь E_K - это внутренняя энергия моля компонента. Функции безразмерная энтальпия и внутренняя энергия являются основой термодинамического описания компоненты; для многих компонент они либо сведены в таблицу, либо аппроксимированы полиномами. В текущем исследовании они взяты из [30]; их формат (двух-интервальный) описан в [29] и [31]. Были объединены эти температурные интервалы в один и получены полиномиальные коэффициенты, используя линейный регрессионный анализ, основанный на методе наименьших квадратов.

2.3 Химическая кинетика

В текущем исследовании химические источники зависят от температуры T и набора молярных плотностей $\mathbf{X} = \{X_k\}$; сумма этих источников равна нулю по закону сохранения массы в химических реакциях:

$$\dot{\omega}_k = W_k \dot{\omega}_k(T, X), \sum_{k=1}^{N_C} \dot{\omega}_k = 0. \quad (8)$$

Существуют некоторые более строгие законы для химических взаимодействий, например, сохранение массы для каждого элемента. Эти законы учитываются в химическом механизме, и иногда могут уменьшить вычисления и повысить точность. Общая форма химических источников обычно сложна и состоит из множества нелинейных терминов; выражение для источников выглядит следующим образом:

$$\dot{\omega}_k = \sum_r \nu_{r,k} \omega_r, \omega_r = M_r(X) \left[k_{F,r}(M_r, T) \prod_j X_j^{\alpha_{r,j}} - k_{R,r}(M_r, T) \prod_j X_j^{\beta_{r,j}} \right]. \quad (9)$$

В случае элементарных реакций степени для видов в выражении (9) совпадают со стехиометрическими коэффициентами входа и выхода. Коэффициенты скорости обратной реакции были рассчитаны для обеспечения динамического достижения химического равновесия в случае нулевых потоков и постоянной плотности и внутренней энергии:

$$k_{B,r} = k_{F,r} \exp \left(\sum_{k=1}^{N_C} \nu_{r,k} (\hat{H}_k(T) - \hat{S}_k(T) - 1) \right) \left(\frac{R_G T}{p_{ref}} \right)^{\sum_{k=1}^{N_C} \nu_{r,k}} \quad (10)$$

Для каждой прямой реакции ее коэффициент моделируется формулой Аррениуса.

2.4 Модель турбулентности и переноса

В настоящем исследовании используется модель Wilcox k- ω [2]:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho K u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) = \tau_{i,j}^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho K \omega \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \omega u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \alpha \frac{\omega}{K} \tau_{i,j}^T \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 \quad (12)$$

$\alpha, \sigma, \sigma^*, \beta, \beta^*$ – константы: параметры модели Уилкокса со значениями:

$$\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{3}{40}, \beta^* = \frac{9}{100}$$

Турбулентная вязкость μ_T в модели турбулентности определяется через параметры турбулентности:

$$\mu_T = \rho \frac{K}{\omega}, \quad (13)$$

Турбулентная часть дивергента тензора напряжений как:

$$\tau_{i,j}^T = \rho \frac{K}{\omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{i,j} \right) \quad (14)$$

Молекулярная вязкость смеси газов рассчитывается через вязкости компонент и молярные плотности как:

$$\mu = \sum_{k=1}^{N_C} \frac{X_k \mu_k(T)}{\sum_{j=1}^{N_C} X_j \phi_{k,j}(T)}. \quad (15)$$

Эффективная вязкость смеси ниже средневзвешенной из-за бинарного влияния коэффициентов взаимности $\phi_{k,j}$. Простой способ их вычисления был опубликован в [32]:

$$\phi_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{W_k}{W_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\mu_k}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{W_j}{W_k} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \quad (16)$$

Молекулярная вязкость рассчитывается с использованием физических молекулярных констант, взятых из базы данных [33], а метод расчета - из [32].

Для расчета потоков массы и энергии $\mathbf{J}_{k,j}$, и $\mathbf{J}_{T,j}$, и дивергенции тензора напряжений $\tau_{i,j}$ использовали модель, учитывающую турбулентный перенос, рассчитанный с помощью модели Уилкокса [34]. В большинстве случаев турбулентный перенос заменяет молекулярный, и последний делается с использованием упрощенной техники: гипотеза постоянных чисел Прандтля Pr и Шмидта Sc :

$$\begin{aligned} J_{k,j} &= \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}, \\ J_{T,j} &= \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + (\mu + \mu_T) \frac{\partial K}{\partial x_j}, \\ \tau_{i,j} &= (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \delta_{i,j} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь: Sc_T, Pr_T – турбулентные числа Шмидта и Прандтля соответственно, константы, $h = H/\rho$ – энтальпия единицы массы смеси, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Энтальпия единицы объема вычисляется как

$$H = R_G T \sum_{k=1}^{N_C} X_k \hat{H}_k(T). \quad (18)$$

3. Тестовая задача

В качестве теста была рассмотрена камера сгорания детонационного двигателя. Геометрически это полый цилиндр с цилиндрическим внутренним телом, который заканчивается конусом. Топливо поступает в камеру через многочисленные форсунки (предварительно смешанный состав $[H_2]:[O_2] = 3:1$, давление в баллонах 10 бар, температура 258 К, число Маха на каждом отверстии 1). Сначала камера заполняется воздухом при давлении 1 бар и температуре 300 К. Зажигание производится с помощью внешнего источника энергии в небольшую сферическую часть: $rg_{ign} = 2,5$ мм в течение первого разряда = 10-6 секунд от первоначального экземпляра и с мощностью на объем до $Q = 20$ кВт / см³.

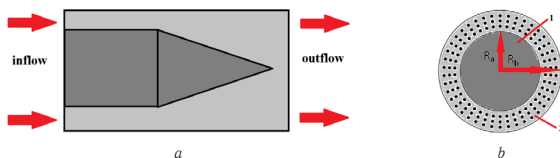


Рис. 1. Геометрия камеры сгорания. Вид снизу; расположение инжекторов подачи смеси

Длина рабочей зоны была $L = 20$ см, максимальная ширина рабочей зоны $R = 1$ см, радиус внутреннего тела $R_a = 4$ см, радиус устройства $R_b = 5$ см, длина внутреннего тела без ограничительного конуса была $L_b = 5$ см (а на рис. 1), длина концевой конуса $L = 10$ см, количество форсунок (b на рис. 1) $N_r = 48$, радиус их отверстий $r = 0,2$ см.

3.1 Список компонент и кинетический механизм

Водород, кислород и азот были исходными и входящими компонентами смеси. В процессе сгорания, помимо основного продукта, водяного пара, образуются многочисленные продукты (радикалы); при высокой температуре они все еще сохраняются в смеси, а при более низкой температуре они разлагаются. Чтобы направить детонационную волну в определенном направлении, подача газовой смеси вначале была неравномерной: отверстия открывались постепенно, в зависимости от их угловой координаты; это хорошо видно на Рис. 2. Последовательность открытия отверстий идет против часовой стрелки.

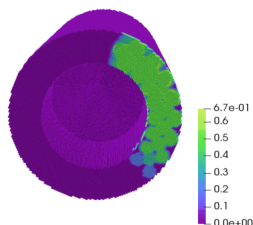


Рис. 2. Распределение топлива (H_2) в камере сгорания перед зажиганием

4. Численный метод

Расчеты основаны на системе уравнений Навье - Стокса, дополненной уравнениями для моделирования турбулентности и химической кинетики. В численном моделировании использовалась MUSCL интерполяция переменных от центров ячеек к граням ячеек, а также явный метод AUSM-plus [36], [37]. Данный метод является методом 2-го порядка по пространству и по времени, за исключением зон сильных градиентов переменных. Химическая кинетика, содержащая 20 обратимых элементарных реакций с 9 типами, представляла собой модифицированный механизм Мааса - Варнаца, кинетика обратных реакций рассчитывалась с использованием константы равновесия. Поток от химических реакций был получен полуявным образом.

В вычислительной области использовалась регулярная сетка из однородных кубических элементов. В рассматриваемом случае рабочая зона содержала более 9 миллионов ячеек. Критические по времени части программы были распараллелены с использованием техники OpenMP. Расчеты проводились на компактном суперкомпьютере АРК-5 с максимальной производительностью 5,5 терафлоп.

5. Результаты

На Рис. 3 показано давление в камере сгорания детонационного двигателя для разных времен. Параметр показан в сечении OYZ на расстоянии 0,5 см от конца инжектора. На Рис. 4 показана температура в том же сечении.

Как показано на Рис. 3-6, после зажигания возникает сильная детонационная волна. Она начинает распространяться по свежей смеси, вращаясь между коаксиальными цилиндрами в передней части камеры сгорания. Через 100 мкс система частично теряет стабильность, и начинает возникать вторичная детонационная волна. Через 150 мкс вторая детонационная волна движется прямо к исходной. Для рассматриваемой богатой смеси происходит периодический «взрыв во взрыве», за счет этого исходная волна исчезает, а затем вновь возникает с периодическими расщеплениями.

В результате численного эксперимента для данного набора параметров мы получи-

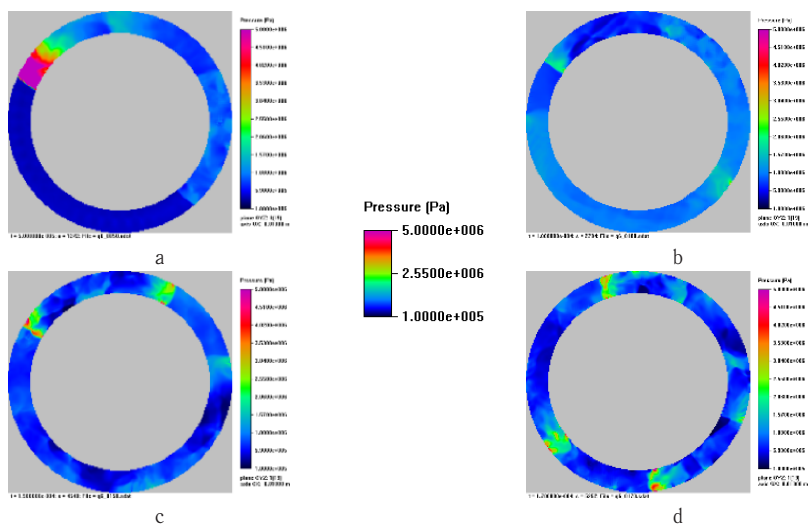


Рис. 3. Давление в поперечном сечении в разное время по оси OX : а) $t=50\mu s$, б) $t=100\mu s$, в) $t=150\mu s$, д) $t=200\mu s$

ли галолирующую детонационную волну, вращающуюся в камере сгорания. Вначале возникает стабильная детонационная волна, но через 80 мкс она распадается на две, даже 3 волны, которые затем объединяются в одну детонационную волну. После этого через некоторое время процесс повторяется: этому способствуют отражения боковых волн от стен.

Заключение

Была рассмотрена подача богатой смеси в камере сгорания с торцевой части камеры сгорания. В результате вычислительного эксперимента был получен галолирующий режим детонации: возникает стабильная детонационная волна, но через некоторое время она распадается на две, даже 3 волны, которые затем объединяются в одну детонационную волну (исходная волна исчезает, а вторичная волна увеличивается). Такие режимы приводят к дестабилизации работы двигателя с вращающейся детонационной волной, и возникновение таких режимов следует избегать на практике.

Данная конфигурация камеры сгорания не является оптимальной с точки зрения производства тяги и стабильности горения; это требует поиска более стабильного вращающегося режима детонации и обеспечивающих его параметров. Изучение неустойчивых режимов вращающейся детонации все еще имеет большое значение, как и другие переходные эффекты в камерах сгорания.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке программы РАН "Разработка алгоритмической компоновки и программ для расчета многомасштабных процессов и горения" (№ 0065-2019-0021).

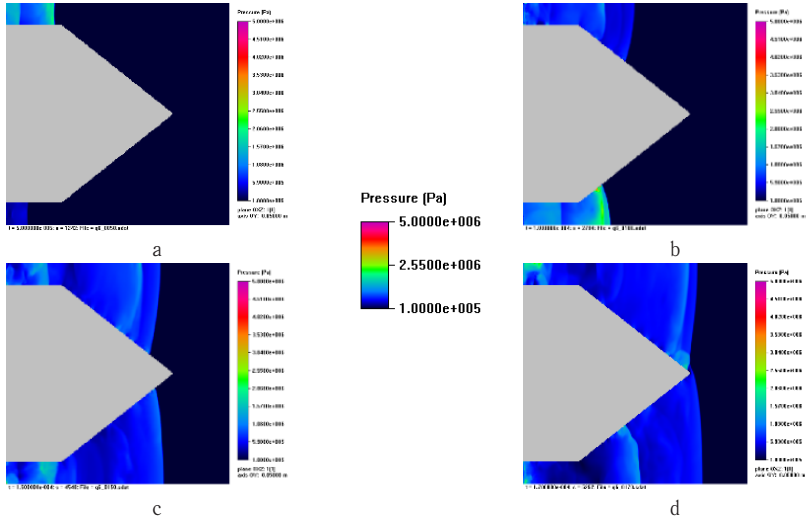


Рис. 4. Давление в поперечном сечении в разное время по оси OY: а) $t=50\mu s$, б) $t=100\mu s$, в) $t=150\mu s$, д) $t=200\mu s$

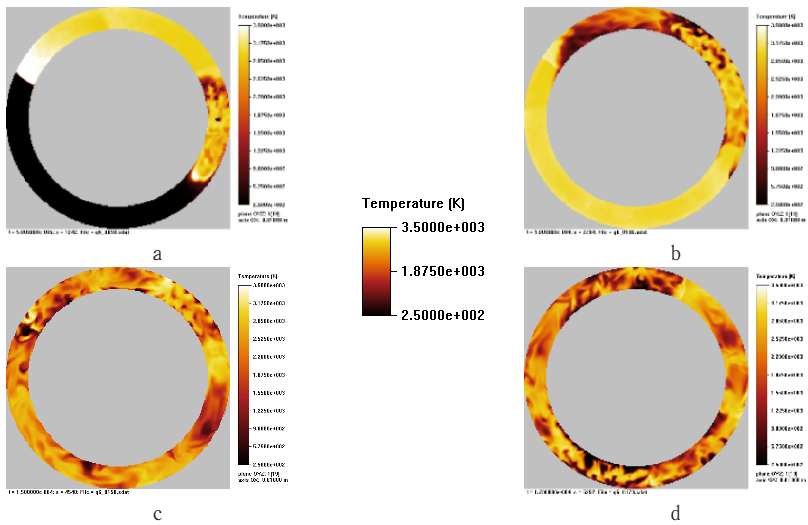


Рис. 5. Температура в поперечном сечении в разное время по оси OX: а) $t=50\mu s$, б) $t=100\mu s$, в) $t=150\mu s$, д) $t=200\mu s$

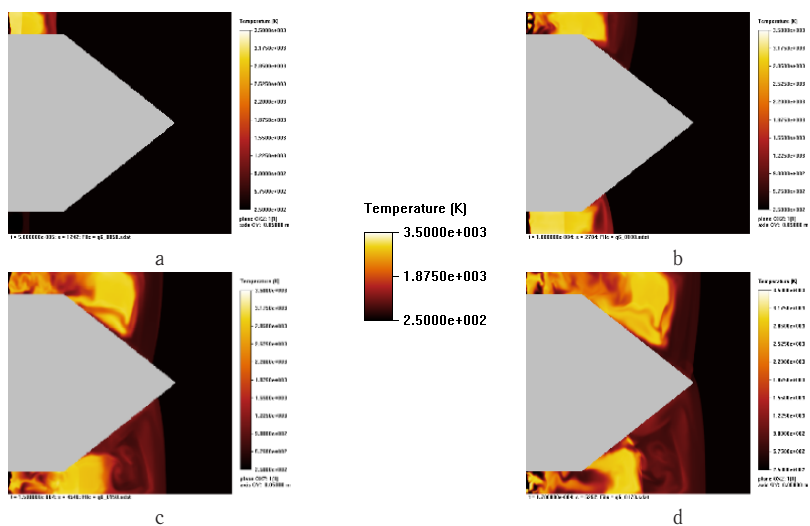


Рис. 6. Температура в поперечном сечении в разное время по оси OY:
a) $t=50\mu s$, b) $t=100\mu s$, c) $t=150\mu s$, d) $t=200\mu s$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Wolański. Detonative propulsion // P COMBUST INST. 2013. Vol. 34. P. 125–158.
2. Smirnov N.N., Betelin V.B., Nikitin V.F., Phylippov Y.G., Koo J. Detonation engine fed by acetylene-oxygen mixture. *Acta Astronaut.* 2014.
3. C.A. Norden, D. Schwer, F. Schauer, B. Hoke, B. Cetegen, T. Barber. Thermodynamic modeling of a rotating detonation engine, in: *Proceedings of the 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (AIAA 2011-0803)*, 2011.
4. Phylippov Y.G., Dushin V.R., Nikitin V.F., Nerchenko V.A., Korolkova N.V., Guendugov V.M. Fluid mechanics of pulse detonation thrusters. *Acta Astronaut.* 2012; 76:115-126.
5. Nikitin V.F., Dushin V.R., Phylippov Y.G., Legros J.C. Pulse detonation engines: Technical approaches. *Acta Astronaut.* 2009; 64:281-287.
6. K. Kailasanath, E.S., Oran, J.P., Boris, T.R., Young, Determination of detonation cell size and the role of transverse waves in two-dimensional detonations, *Combust. Flame* 61 (3) (1985) 199–209.
7. L. Wei, Z. Jin, L. Shijie, L. Zhiyong, Z. Fengchen. Experimental study on propagation mode of H₂/Air continuously rotating detonation wave, *International Journal of Hydrogen Energy* 40 (2015) 1980-1993.
8. B.V. Voitsekhovskii, Stationary detonation. *Doklady Akademii Nayk* 129 (6) (1959) 1254-1256.
9. J.A. Nicholls, R.E. Cullen, K.W. Ragland. Feasibility studies of a rotating detonation wave rocket motor, *Journal of Spacecraft and Rockets* 3 (6) (1966) 893-898.
10. F.A. Bykovskii, V.V. Mitrofanov, E.F. Vedernikov. Continuous detonation combustion of fuel-air mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves* 33 (3) (1997) 344-353.
11. F.A. Bykovskii, E.F. Vedernikov. Continuous detonation of a subsonic flow of a propellant. *Combustion, Explosion, and Shock Waves* 39 (3) (2003) 323-334.
12. F.A. Bykovskii, S.A. Zhdan, E.F. Vedernikov. Continuous spin detonations. *Journal of Propulsion and Power* 22 (6) (2006) 1204-1216.
13. Bykovskii F.A., Zhdan S.A., and Vedernikov E.F.: Continuous spin detonation in ducted annular combustors. *Application of Detonation to Propulsion*, edited by G. Roy et al, Torus Press, pp.174-179, 2004.
14. J. Kindracki, P. Wolanski, Z. Gut. Experimental research on the rotating detonation in gaseous fuels-oxygen mixtures. *Shock Waves* 21 (2011) 75-84.
15. S.A. Zhdan, F.A. Bykovskii, E.F. Vedernikov, Mathematical modeling of a rotating detonation wave in a hydrogen-oxygen mixture. *Combustion, Explosion, and Shock Waves* 43 (4) (2007) 449-459.
16. L. Shijie, L. Zhiyong, L. Weidong, L. Wei, Z. Fengchen. Experimental realization of H₂/air continuous rotating detonation in a cylindrical combustor. *Combustion Science and Technology* 184 (9) (2012) 1302-1317.
17. L. Shijie, L. Weidong, L. Zhiyong, L. Wei. Experimental research on the propagation characteristics of continuous rotating detonation wave near the operating boundary. *Combustion Science and Technology* 187 (2015) 1790-1804
18. S. Jian, Z. Jin, L. Shijie, L. Zhiyong, C. Jianhua. Effects of injection nozzle exit width on rotating detonation engine, *Acta Astronautica* 140 (2017) 388-401.
19. W. Jianping, S. Yetao. Rotating detonation engine injection velocity limit and nozzle effects on its propulsion performance. *Computational Fluid Dynamics* (2010) 789-795.
20. S. Yetao, L. Meng, W. Jianping. Continuous detonation engine and effects of different

- types of nozzle on its propulsion performance. *Chinese Journal of Aeronautics* 23 (2010) 647-652.
21. N. Tsuboi, S. Eto, A.K. Hayashi, T. Kojima. Front cellular structure and thrust performance on hydrogen-oxygen rotating detonation engine. *Journal of Propulsion and Power* 33 (1) (2017) 100-111.
 22. C.A. Nordeen, D. Schwer, F. Schauer, J. Hoke, T. Barber, B.M. Cetegen. Role of inlet reactant mixedness on the thermodynamic performance of a rotating detonation engine. *Shock Waves* 26 (4) (2016) 417-428.
 23. R.T. Fievisohn, K.H. Yu. Steady-state analysis of rotating detonation engine flowfields with the method of characteristics. *Journal of Propulsion and Power*, Article in Advance (2016).
 24. M.L. Fotia, F. Schauer, T. Kaemming, J. Hoke, Experimental study of the performance of a rotating detonation engine with nozzle. *Journal of Propulsion and Power* 32 (3) (2016) 674-681.
 25. V.A. Levin, I.S. Manuylovich, V.V. Markov. Rotating detonation wave in an annular gap. *Proc. of Steklov Institute of Math*, 300 (2018), 135-145
 26. Dubrovskii A.V., Ivanov V.S., Frolov S.M.: Three-dimensional numerical simulation of the operation process in a continuous detonation combustor with separate feeding of hydrogen and air. *Russ. J. Phys. Chem. B* 9 (1), 104-119 (2015)
 27. N. N. Smirnov, V. F. Nikitin, L. I. Stamov et al. Rotating detonation in a ramjet engine three-dimensional modeling // *Aerospace Science and Technology*. — 2018. — Vol. 81. — P. 213-224.
 28. S. YaoX. HanY. LiuJ. Wang Numerical study of rotating detonation engine with an array of injection holes *Shock Waves*, May 2017, Volume 27, Issue 3, pp 467-476.
 29. CHEMKIN. A software package for the analysis of gas-phase chemical and plasma kinetics. CHE-036-1. Chemkin collection release 3.6. Reaction Design, September 2000.
 30. Marinov, N.M., Pitz, W.J., Westbrook, C.K., Hori, M., and Matsunaga, N. An Experimental and Kinetic Calculation of the Promotion Effect of Hydrocarbons on the NO-NO₂ Conversion in a Flow Reactor. *Proceedings of the Combustion Institute*, Volume 27, pp. 389-396, 1998. (UCRL-JC-129372). UCRL-WEB-204236.
 31. R.J. Kee, J.A. Miller, and T.H. Jefferson. Chemkin: a general-purpose, problem-independent, transportable Fortran chemical kinetics code package. Sandia National Laboratories Report SAND80-8003 (1980).
 32. Transport. A software package for the evaluation of gas-phase, multicomponent transport properties. TRA-036-1, CHEMKIN collection, release 2000
 33. Connaire, M. O., Curran, H. J., Simmie, J. M., Pitz, W. J. and Westbrook, C.K., "A Comprehensive Modeling Study of Hydrogen Oxidation *International Journal of Chemical Kinetics*, 36:603-622, 2004: UCRL-JC-152569.
 34. D.C. Wilcox. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Canada, 1993.
 35. U. Maas, and S.B. Pope. Simplifying chemical kinetics: intrinsic low-dimensional manifolds in composition space. *Combustion and Flame*, 88, 239-264 (1992).
 36. Hirsch, C. (1990), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, vol 2, Wiley.
 37. Liou, M.-S., "A Sequel to AUSM: AUSM+" *J. Comput. Phys.*, Vol. 129, 364-382, 1996

Пленарные доклады в Сургуте

ОБ ИНТЕГРИРОВАННОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ОКРУЖЕНИИ ДЛЯ НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ

Ильин В. П.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
Новосибирский государственный университет
Новосибирский государственный технический университет*

Рассматривается концепция, архитектура и основные спецификации интегрированного вычислительного окружения для нефтегазовой отрасли, предназначенного для высокопроизводительного решения широкого круга междисциплинарных прямых и обратных задач георазведки, безопасного бурения, добывающих технологий, нефтегазового транспорта, переработки сырьевых продуктов, а также экологических и экономических проблем. Проект включает в себя создание наукоемкой инструментальной среды для комплексной поддержки всех этапов математического моделирования на базе современных достижений искусственного интеллекта, методов работы с большими данными и облачных суперкомпьютерных технологий. Разрабатываемое программное обеспечение нового поколения ориентировано на активное развитие состава вычислительных моделей и алгоритмов, адаптацию к эволюции компьютерных платформ, эффективное переиспользование внешних разработок, согласованное участие различных разработчиков, а также востребованность широким кругом пользователей с различной профессиональной подготовкой. Проект рассчитан на длительный жизненный цикл с эффективным взаимодействием академических институтов, университетских компетенций, профессиональных программистских производственных организаций, а также специалистов из отраслевых подразделений и госкорпораций.

ОТ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗРЫВА К ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Кутрунов В. Н., Исрафилова А. И.

г. Тюмень

Устанавливается логическая связь между информационным взрывом, непрерывным образованием, индивидуальной образовательной траекторией, технологиями эффективного мышления.

Ключевые слова: Информационный взрыв, непрерывное образование, индивидуальная образовательная траектория, Mind Mapping.

FROM INFORMATION EXPLOSION TO INDIVIDUALIZED EDUCATIONAL PATHWAYS

Kutrunov V. N., Israfilova A. I.

Tyumen

A logical link is defined between the information explosion, lifelong learning, individualized educational pathways and effective thinking techniques.

Keywords: Information explosion, lifelong learning, individualized educational pathways, Mind Mapping.

В образовании что-то не так, в этом сходятся все, но у всех разная аргументация. Родители- перегрузка дисциплинами, усложненные учебники; Работодатели- многое, чему учат, устарело и не учат тому, что требуется в данный момент для эффективного развития общества; Учителя школ и преподаватели вузов- нехватка времени, отведенного в учебных планах на изучение дисциплины; Органы управления образованием испытывают давление со всех сторон- судорожно пытаются менять государственные стандарты образования; Процесс изменений ФГОСов слишком быстр, никто не успевает привыкнуть к измененной реальности и скорректировать работу; Работа не на качество образования, а на документооборот; Все это видят и знают все, но общая неудовлетворенность ситуацией гонит процесс дальше, система работает вхолостую, без обратной связи.

Можно считать доказанной неустойчивость, нестабильность процессов, происходящих в образовании и, следуя Аристотелю, аргументируем это тем, что нестабильность «ощущают» все. Следовательно, нет необходимости определять это состояние, поскольку каждый человек будет «ощущать» процессы по-разному и по-разному будет их определять. С такой ситуацией человечество встречалось. Например, основные понятия геометрии- «точка», «прямая», «плоскость», никак не определены, поскольку «все знают, что это такое». Это не помешало геометрии стать точной наукой.

Однако, в образовании эти процессы вызывают беспокойство, призывают к действию. Если рассматривать крайности, то человечество раскололось на два лагеря: одни что-то могут поменять и меняют, а другие активно критикуют их, не предлагая ничего конструктивного. Между двумя полюсами находится весь спектр взглядов и подходов. Поскольку процесс коснулся всех, то каждый имеет свою точку зрения. Неустойчивость очень болезненна. "Не дай Вам Бог жить в эпоху перемен! Конфуций. С другой стороны, только в условиях перемен и может произойти изменение качества, произрасти новое.

Что же остается? Надо минимизировать издержки и найти более или менее правильный путь. Для этого необходимо разобрать процесс на составляющие, структурировать его, увидеть причинно-следственные связи и только тогда действовать. Но и в этом случае, действовать осторожно. Все это не описывается математикой; точных, или приближенных оценок не будет. Поэтому впереди неизбежный путь проб и ошибок, но продуманный, возможно, менее болезненный путь.

Мы пытаемся выявить логическую структуру процессов в образовании, понять причины нестабильности. Пытаемся спрогнозировать неизбежные позитивные или негативные тенденции. Если негативные тенденции не могут быть ликвидированы, предложить параллельные конкурирующие процессы, которые будут развиваться как антагонистические пары. В таком ключе проблема рассматривалась авторами уже достаточно длительное время. Некоторые из подходов частично публиковались и сегодня продолжают разрабатываться и видоизменяться. В докладе излагается и обосновывается следующая логическая структура происходящих быстрых процессов:

- В начале процесса- *гиперинформатизация общества*. Видят все.
- Гиперинформатизация приводит к *информационному взрыву (ИВ)*. Объем информации нарастает экспоненциально. Сегодня он удваивается каждые два года, с 2020 года- каждый год. Время удваивания быстро сокращается.
- Гиперинформатизация и информационный взрыв вынуждают человечество защищаться. Среди них технические средства защиты- средства хранения, обработки и передачи информации, что ведет к *отторжению от человечества приобретенной им способности к мышлению*. Не технические средства- невозможность индивидуально обрабатывать условно бесконечные объемы информации закрепляет условный рефлекс- «информационный серфинг» (скольжение по информации без остановок и продумывания; предпочтение клипов; комиксов; дайджестов; игнорирование длиннот; текстов). Как следствие- *клиповое мышление, цифровая амнезия, функциональная безграмотность, цифровая зависимость; деградация долговременной памяти, письменности, речи, чтения*.
- Предыдущее вынуждает: во- первых, учиться от рождения и до смерти (Концепция *НО*- непрерывного образования); во- вторых, изучать только то, что нужно в данный момент (иначе не справиться с *ИВ*) (Концепция *ИОТ*- индивидуальной образовательной траектории); в третьих, владеть специальными технологиями эффективного мышления (Концепция *ТЭМ*). Иначе говоря, уметь эффективно думать – сегодня это специальная компетенция, *которую надо специально приобретать, которой надо специально учиться*.

Первые пункты отвечают на вопрос, что с неизбежностью происходит. Очевидно, что указанные тенденции не могут быть остановлены или обращены вспять. В последнем пункте утверждается неизбежность прописанных в нем мер противодействия и нужны ли они, такой спор лишен смысла. Заметим еще, что и сам доклад построен по одной из технологий *ТЭМ*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутрунов В.Н. Логика эволюционных последствий информационного взрыва. Как учить в новых условиях? // Интеграция в преподавании предметов естественно-математического цикла и информатики: механизмы и средства / Сб. материалов Межрегиональной научно-практической конференции педагогических работников. 6 декабря 2016г.-Тюмень, ТОГИРРО, 2016. С.4-7.
2. Кутрунов В.Н., Исафилова А.И. Новая идея: Абсолютный (без ограничений) выбор индивидуальной образовательной траектории. Это возможно? // Современный учитель дисциплин естественно научного цикла: сб. материалов Международной научно-практической конференции (15-16 февраля 2019г.; г. Ишим) / отв. ред. Т.С. Мамонтова. – Ишим: Изд-во ИПИ им. П.П. Ершова (филиала) ТюмГУ, 2019. С. 7-14.

3. Kutrunov V.N. V.A. Shaptsev, N.A.Garkusha, L.V.Sizova Mind Map and Information Surfing. Unity of Opposites in Education Advances in Social Science, Education and Humanities Research, volume 198. International Conference on the Theory and Practice of Personality Formation in Modern Society (ICTPPFMS-18) С. 112-117

Секция «Вычислительная математика и математическое моделирование»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Быковских Д. А.¹, Галкин В. А.²

¹ БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет»,
dmitriy.bykovskih@gmail.com

² Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, val-gal@yandex.ru

Работа посвящена исследованию течения идеального бесстолкновительного газа в пористой среде. Представлено описание закона фильтрации для идеального газа в пористой среде. Проведены серии вычислительных экспериментов с различным числом частиц и конфигураций пористой среды. Установлена связь между скоростью течения (статистической оценкой гидродинамической скорости частиц) и скоростью фильтрации идеального бесстолкновительного газа при установившемся течении.

Ключевые слова: фильтрация идеального газа, закон Дарси, метод Монте-Карло.

AN IDEAL COLLISIONLESS GAS FLOW MODELING IN POROUS MEDIUM BY MONTE CARLO METHOD

Bykovskih D. A.¹, Galkin V. A.²

¹ Surgut State University, dmitriy.bykovskih@gmail.com

² System Research Institute, Russian Academy of Sciences, val-gal@yandex.ru

The article is devoted to research of collisionless gas flow in porous medium. Darcy's law description of an ideal gas in porous medium was presented. The computing experiments with different particle numbers and the porous medium configurations were conducted. The relation between the flow speed (a statistical assessment of the hydrodynamic

particle velocity) and the filtration rate of an ideal collisionless gas has been identified at the steady-state process.

В работе рассматривается задача об исследовании закона Дарси для идеального бесстолкновительного газа в трехмерной пористой среде. Кинетическая модель идеального бесстолкновительного газа — динамическая система, состоящая из статистически большого числа частиц, которые не взаимодействуют друг с другом, но взаимодействуют с подвижными границами. Основным вычислительным методом такой модели является метод Монте-Карло (ММК). Работа является продолжением работы [1], где рассматривался двумерный случай.

Предполагается, что можно установить связь между скоростью течения v и скоростью фильтрации u газа. Закон фильтрации для идеального газа в одномерном случае при установившемся течении имеет вид:

$$u_{j,i} = -\frac{k}{\mu} \frac{p_i^2 - p_j^2}{2p_j L}, \quad (1)$$

где коэффициенты j и i — номера элементарных областей.

Элементарная область — выделенная часть некоторой моделируемой области. Каждой такой подобласти в определенный момент времени может принадлежать некоторое количество частиц. С помощью локальных параметров этих частиц рассчитываются значения статистических оценок макроскопических величин [2, 3, 4].

Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ для численного решения задач кинетики идеального бесстолкновительного газа в трехмерной области, позволяющий визуализировать динамику процессов. Данный комплекс программ позволяет производить расчеты на высокопроизводительных вычислительных.

На рис. 1 представлена общая схема работы комплекса программ [5]. Под установлением начального состояния модели подразумевается инициализация параметров частиц с помощью генератора псевдослучайных чисел, границ и элементарных областей. Для каждой элементарной области накапливаются суммы параметров частиц (общая масса, сумма компонентов скоростей и квадратов скоростей), принадлежащих определенной области в момент времени t . С помощью этих сумм вычисляются статистические оценки макроскопических параметров. Сохранение промежуточных данных включает сохранение фазового пространства и сумм параметров частиц, которые используются на этапе обработки данных для визуализации процессов и вычисления статистических оценок макроскопических параметров соответственно. Также последний этап (обработка данных) может включать построение графиков изменения статистических оценок макроскопических параметров с течением времени и вычисления максимальных и относительных погрешностей, полученных в результате сравнения с точным решением.

На рис. 2 представлена вычислительная схема.

В рамках вычислительного эксперимента решалась обратная задача о нахождении коэффициента k/μ , связывающего скорость течения (статистическая оценка гидродинамической скорости) и скорость фильтрации (4) в зависимости от конфигурации пористой среды (рис. 3). Расхождение скорости течения и скорости фильтрации в начальный интервал времени объясняется процессом установления квазистационарного режима.

В вычислительных экспериментах по исследованию задачи фильтрации для идеального бесстолкновительного газа была установлена прямая зависимость между скоростью течения (статистической оценкой гидродинамической скорости) и скорости фильтрации. Для идеального газа, у которого отсутствует внутреннее трение, закон Дарси зависит от структуры пористой среды.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00343 А.

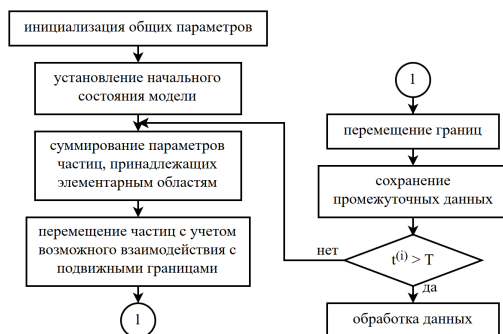


Рис. 1. Общая схема работы комплекса программ

$t = 0000.0$

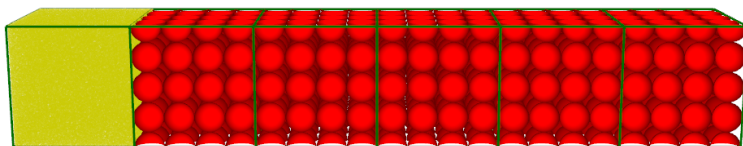
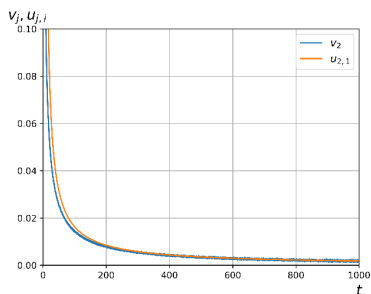
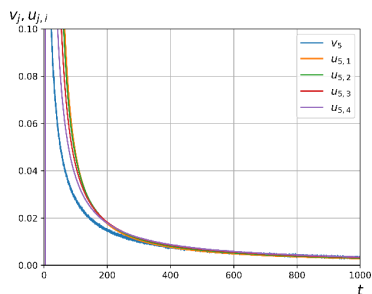


Рис. 2. Вычислительная схема: красным цветом — пористая среда; зеленым цветом — границы элементарных областей; синим цветом — частицы



а)



б)

Рис. 3. Графики зависимости скорости течения v_j и скорости фильтрации $u_{j,i}$ при $N = 10^8$ в зависимости от времени t

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. А. Фильтрационная модель движения идеального газа в пористой среде / В. А. Галкин, Д. А. Быковских, Т. В. Гавриленко, П. А. Стулов // Вестник

- кибернетики. Электр. Журн. 2016. Т. 4 (24). С. 50-57.
2. Быковских Д. А. О вычислительном тесте для одной модели бесстолкновительного идеального газа / Д. А. Быковских, В. А. Галкин // Вестник кибернетики. Электр. Журн. 2017. 3 (27). С. 100-120.
 3. Cercignani C. *Mathematical methods in kinetic theory*. Milano: Politecnico di Milano, 1969.
 4. Галкин В. А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
 5. Bird G. A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. N.Y.: Oxford University Press, 1994.

НЕСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОДУ

Бетелин В. Б.¹, Галкин В. А.^{1,2}, Моргун Д. А.¹, Дубовик А. О.^{1,2}, Девицын И. Н.^{1,2}

¹ *Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук*

² *БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет»*

В статье приводится описание несеточного метода решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода авторами получен алгоритм, реализован и протестирован программный комплекс решения нелинейных систем ОДУ.

Ключевые слова: несеточные методы, методы Монте-Карло, системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

MESHFREE METHOD FOR SOLUTION OF ODE SYSTEMS

Betelin V. B.¹, Galkin V. A.^{1,2}, Morgun D. A.¹, Dubovik A. O.^{1,2}, Devitsyn I. N.^{1,2}

¹ *System Research Institute, Russian Academy of Sciences*

² *Surgut State University*

This paper describes the meshfree method for ordinary differential equations systems solution. Computational algorithm and software based on meshfree method were developed. Tests and comparison with the exact solutions were performed.

Keywords: meshfree methods, Monte Carlo methods, ordinary differential equations systems.

Описание динамики сложных систем предполагает наличие в ней статистически большого количества элементов. Моделирование таких систем основывается на использовании законов сохранения, которые формулируются либо на уровне динамики отдельных частиц, либо в терминах средних величин, задающих распределение элементов системы в пространстве состояний.

Рассмотрим несеточный метод, позволяющий решать дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{du}{dt} = f(u), u(0) = u_0, \quad (1)$$

где функция $f(u)$ предполагается аналитической.

Предложенный в данной работе несеточный метод является модификацией алгоритма, основанного на методе Монте-Карло, опубликованного в работе [1]. Приведем описание имитационной модели для решения методом Монте-Карло. Рассматривается иерархическая система, в которой на каждом уровне рождаются и уничтожаются частицы по «указаниям» с вышележащего уровня. Каждое ОДУ с аналитической правой частью вида (1) вкладывается в стандартную бесконечномерную систему:

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1}, u_i(t) = \gamma_i u_0^i(t), i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

На каждом уровне i (соответствует порядку производной $i-1$) находится не более Num частиц. На каждом уровне i резервируется массив данных $p_{i,k}(t)$, где $k=1, 2, \dots, Num$, $p_{i,k}(t) = \pm 1$ или 0 (см. рис.1). Матрица $p_{i,k}(t)$ определяет характер взаимодействия частиц: +1 – рождение, -1 гибель, 0 – нет взаимодействия. При заполнении уровня появление новых частиц возможно лишь на освобождающиеся места.

Заселённость уровня: $N(t) = \text{сумма}(+1) + \text{сумма}(-1)$

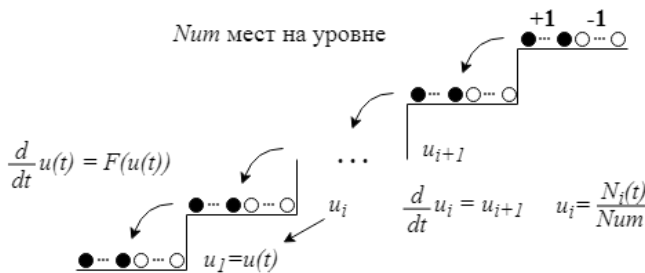


Рис. 1. Иерархическая «лестница» целочисленных переходов

Алгоритм:

1. Перед началом работы с помощью пакета символьных вычислений осуществляется генерация кода для рекуррентного вычисления производных в точке, согласно (1). Порядок рассчитанных производных неизвестной функции u совпадает уменьшенным на единицу количеством используемых уровней. В текущей реализации использовалось 10 уровней.
2. Загрузка начальных массивов частиц по известным начальным данным Коши и аналитическому решению $u_i(0) = \lim_{Num \rightarrow \infty} \frac{N_i(0)}{Num}$, $N_i(t) = \sum_{k=1}^{Num} p_{i,k}(t)$.
3. Определяем эволюцию частиц. Для каждой пары уровней s и q разыгрывается равномерно распределенная дискретная случайная величина из диапазона $[1, \dots, Num]$ – номер n_1 , по которому находится $p_{s,n_1}(t)$. Если $p_{s,n_1}(t) = +1$, то значение какой-либо частицы на q уровне, ранее принимавшей значение 0 или -1 увеличивается на 1. Аналогично, если $p_{s,n_1}(t) = -1$ то уменьшается на 1 значение какой-либо частицы ранее равнявшейся 0 или +1. Если $p_{s,n_1}(t) = 0$ то взаимодействия нет.
4. Определяется приближенное решение $\tilde{u}_i(t) = \frac{N_i(t)}{Num}$.
5. Шаги 3-4 повторяются для каждого момента времени t_n . Если t_n – целое число, то процесс корректируется с помощью рекуррентного вычисления производных в точке

t_n с помощью функций, полученных в шаге 1. После корректировки процесса решения алгоритм возвращается к шагу 2.

Далее представлены результаты тестирования алгоритма на точных решениях задачи (1). Для сравнения представлены также результаты вычисления задачи (1) с разностной аппроксимацией левой части. Шаг по времени составляет $dt = 10^{-4}$.

1) $\frac{du}{dt} = 0.5 \exp\{-u\}$, $u(0) = 0$, $u_{an} = \ln(t/2 + 1)$. В табл. 1 представлены максимальные значения абсолютной и относительной погрешностей.

Таблица 1
Абсолютные и относительные погрешности для решений уравнения 1

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$\delta_{abs} = 0.014$	$\delta_{rel} = 3\%$	$\delta_{abs} = 0.03$	$\delta_{rel} = 7\%$

2) $\frac{du}{dt} = u \wedge 2 - u$, $u(0) = 0.5$, $u_{an} = 1/(1 + \exp(t))$. В табл. 2 представлены максимальные значения абсолютной и относительной погрешностей.

Таблица 2
Абсолютные и относительные погрешности для решений уравнения 2

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$\delta_{abs} = 6 \cdot 10^{-5}$	$\delta_{rel} = 0.02\%$	$\delta_{abs} = 0.02$	$\delta_{rel} = 5\%$

Отметим, что дифференциальные уравнения высших порядков могут быть легко представлены в виде системы уравнений типа (1) [2]. Рассматривается система дифференциальных уравнений (3) с аналитической правой частью и начальными условиями $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, w), \\ \frac{dw}{dt} = g(u, w). \end{cases} \quad (3)$$

Далее представлено решение нескольких тестовых задач:

$$1) \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{4}u^2w, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{u} - \frac{1}{4}w^2u. \end{cases}, u_0 = 1, w_0 = 0, u_{an} = \exp\left\{\frac{t^2}{8}\right\}, w_{an} = t \exp\left\{-\frac{t^2}{8}\right\}.$$

Оценки погрешностей при $t=1$ приведены в табл. 3. Графики решений изображены на рис. 2.

Таблица 3
Абсолютные и относительные погрешности для решений задачи 1)

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$u(t)$	$w(t)$	$u(t)$	$w(t)$
$\delta_{abs} = 2 \cdot 10^{-6}$	$\delta_{abs} = 3 \cdot 10^{-5}$	$\delta_{abs} = 2 \cdot 10^{-3}$	$\delta_{abs} = 0.04$
$\delta_{rel} = 2 \cdot 10^{-4}\%$	$\delta_{rel} = 4 \cdot 10^{-3}\%$	$\delta_{rel} = 0.2\%$	$\delta_{rel} = 4\%$

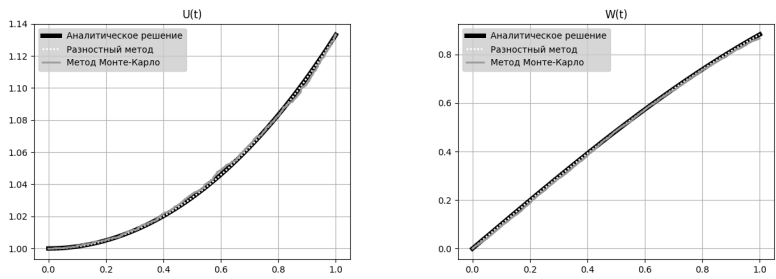


Рис. 2. Решения задачи 1)

2) $\begin{cases} \frac{du}{dt} = uw, \\ \frac{dw}{dt} = -uw. \end{cases}, u_0 = 0.5, w_0 = 0.5, u_{an} = \frac{1}{\exp\{-t\} + 1}, w_{an} = \frac{\exp\{-t\}}{1 + \exp\{-t\}}.$

Оценки погрешностей при $t=1$ приведены в табл. 4. Графики решений изображены на рис. 3.

Таблица 4
Абсолютные и относительные погрешности для решений задачи 2)

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$u(t)$	$w(t)$	$u(t)$	$w(t)$
$\delta_{abs} = 6 \cdot 10^{-6}$	$\delta_{abs} = 6 \cdot 10^{-6}$	$\delta_{abs} = 0.02$	$\delta_{abs} = 9 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{rel} = 9 \cdot 10^{-4}\%$	$\delta_{rel} = 2 \cdot 10^{-4}\%$	$\delta_{rel} = 3\%$	$\delta_{rel} = 0,04\%$

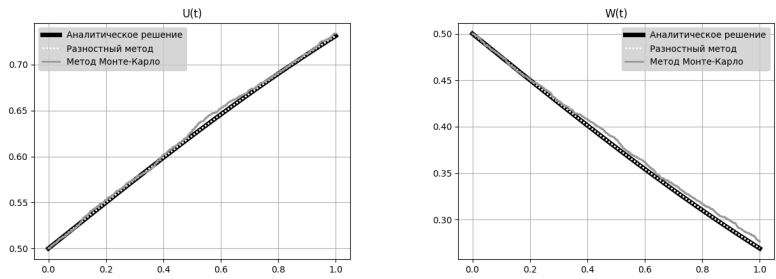


Рис. 3. Решения задачи 2)

$$3) \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{4} \exp\{-u\} \frac{du}{dt} = 0, \text{ что эквивалентно системе } \begin{cases} \frac{du}{dt} = w, \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{4} w \exp\{-u\}. \end{cases},$$

$$u_0 = 0, w_0 = 0.25, u_{an} = \ln\left(\frac{t}{4} + 1\right), w_{an} = \frac{1}{4+t}.$$

Оценки погрешностей при $t=1$ приведены в табл. 5. Графики решений изображены на рис. 4.

Таблица 5

Абсолютные и относительные погрешности для решений задачи 3)

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$u(t)$	$w(t)$	$u(t)$	$w(t)$
$\delta_{abs} = 2 \cdot 10^{-4}$	$\delta_{abs} = 4 \cdot 10^{-4}$	$\delta_{abs} = 0.015$	$\delta_{abs} = 2 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{rel} = 0.1\%$	$\delta_{rel} = 0.2\%$	$\delta_{rel} = 3,5\%$	$\delta_{rel} = 6\%$

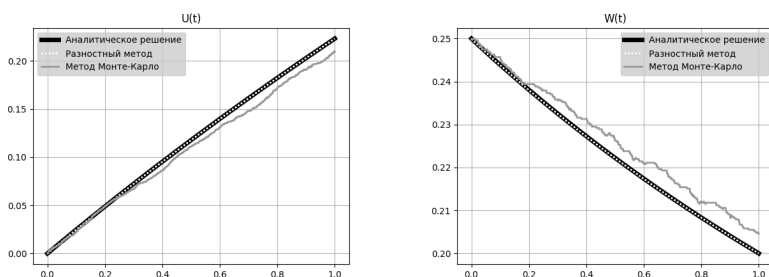


Рис. 4. Решения задачи 3)

Тестирование алгоритма было также продолжено на решении следующей задачи:

$$\frac{du}{dt} = u^2, u(0) = u_0. \quad (4)$$

Особенностью этой задачи является тот факт, что ее решение имеет подвижный полюс при $t = 1/u_0$, $u_{an} = u_0/(1 - u_0 t)$. Однако, решение задачи (4) может быть сведено к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка каких-либо особенностей [2], что и было сделано при тестировании алгоритма с начальным условием $u(0) = 2$. В табл. 6 представлена оценка максимальной абсолютной и относительной погрешности. График решения изображен на рис. 5.

В работе был получен алгоритм решения нелинейных систем ОДУ вида (3) несечным методом, на основе данного алгоритма реализован и протестирован комплекс программ, приведены результаты тестирования. Работа выполнена в рамках гос. задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

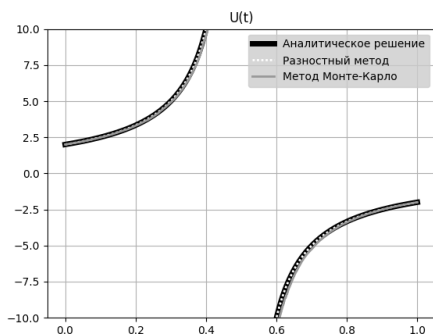


Рис. 5. Решение задачи (3)

Таблица 6

Абсолютные и относительные погрешности для решений задачи (3)

Разностный метод		Метод Монте-Карло	
$\delta_{abs} = 8 \cdot 10^{-3}$	$\delta_{rel} = 0.08\%$	$\delta_{abs} = 0.6$	$\delta_{rel} = 6\%$

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. А., Здоровцев П. А. Решения моментных цепочек для уравнения переноса и их приближения. Матем. моделирование, 2012, том 24, номер 11, с. 65–71.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е. Л: Изд-во Техничко-теор. лит. 1950. 436 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Бычин И. В., Гореликов А. В.

г. Сургут

Для решения уравнения индукции магнитного поля в произвольных ортогональных координатах методом контрольного объема использована процедура дискретизации на смещённых сетках, которая позволяет получать численное решение, удовлетворяющее сеточному уравнению неразрывности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант: 18-47-860005 р_а.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, численное решение, течение проводящей жидкости.

NUMERICAL SOLUTION OF THE INDUCTION EQUATION IN PROBLEMS OF FLOW OF CONDUCTIVE LIQUID

Bychin I. V., Gorelikov A. V.

Surgut

To solve the equation of magnetic field induction in arbitrary orthogonal coordinates by the control volume method, a discretization procedure on displaced grids is used, which allows to obtain a numerical solution satisfying the grid continuity equation.

The work is executed at support of RFBR, grant: 18-47-860005 ra.

Keywords: magnetic hydrodynamics, numerical solution, conducting fluid flow.

При численном решении уравнения индукции, возникает проблема «численного магнитного заряда» [1]. Существуют различные подходы для решения данной проблемы: использование векторного потенциала; процедура коррекции магнитного поля путем прибавления к нему поправочного поля, т.е. метод искусственного скалярного потенциала [2]; применение смещенных сеток и запись дискретного аналога уравнения индукции в такой форме, чтобы его решение автоматически удовлетворяло сеточному уравнению неразрывности [3-5] (такой подход использован и в данной работе). Несмотря на достаточно большое число работ в этой области, разработка эффективных алгоритмов решения уравнения индукции остается актуальной задачей вычислительной магнитной гидродинамики.

Течение проводящей жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений магнитной гидродинамики [6]. В работе предложен метод численного решения уравнения индукции магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \text{rot rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

(t – время; $\mathbf{u}$ – скорость жидкости; $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля, ν_m – коэффициент магнитной вязкости) в произвольных ортогональных координатах.

Из (1) следует, что соленоидальность начальных условий $\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = 0$ обеспечивает соленоидальность магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и в последующие моменты времени.

Дискретизация расчетной области

Пусть $\{x_\alpha\}$ – произвольные ортогональные координаты, $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ – соответствующий правый ортонормированный базис, $\{H_\alpha\}$ – коэффициенты Ламе (индекс α принимает значения 1, 2, 3). Расчетная область G – ограниченная область в R^3 , граница которой (∂G) состоит из конечного числа координатных поверхностей $x_\alpha = \text{const}$. Метод контрольного объема предполагает, что расчетная область G разбивается координатными поверхностями на непересекающиеся подобласти – контрольные объемы $D_{i_1 i_2 i_3}$. Внутри каждого контрольного объема содержится внутренняя расчетная (узловая) точка $P_{i_1 i_2 i_3}$ ($P_{i_1 i_2 i_3} \in D_{i_1 i_2 i_3}$), обычно $P_{i_1 i_2 i_3}$ находится в центре соответствующего контрольного объема. Сеточные значения компонент магнитного поля рассчитываются на гранях контрольных объемов, т.е. используется дискретизация на смещенных расчетных сетках [7]. В целях сокращения записи (там, где это возможно) будем обозначать набор индексов i_1, i_2, i_3 – (i). Для описания процедуры дискретизации на смещенных сетках удобно использовать операторы сдвига $h_\alpha^\sigma(i) \equiv h_\alpha^\sigma(i_1, i_2, i_3) = h_\alpha^\sigma(i_1), h_\alpha^\sigma(i_2), h_\alpha^\sigma(i_3)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\sigma = -1, 1$ на наборах индексов $i_1 i_2 i_3$, которые определяются по правилу:

$$h_\alpha^\sigma(i_\beta) = i_\beta + \frac{\sigma}{2} \delta_{\alpha\beta}, \alpha = 1, 2, 3, \sigma = -1, 1, \quad (2)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Точки с одним полуцелым индексом $P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ находятся на гранях $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ контрольного объема $D_{(i)}$ ортогональных координате x_α , $\partial D_{(i)} = \bigcup_{\alpha=1}^3 S_{h_\alpha^{\pm 1/2}(i)}$. Точки с двумя полуцелыми индексами $P_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ находятся на ребрах $l_{\gamma, h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = S_{h_\beta^{\chi/2}(i)} \cap S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ ($\gamma \neq \alpha \neq \beta$) контрольного объема $D_{(i)}$ расположенных вдоль координатных линий x_γ , $\partial S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = l_{\gamma, h_\beta^{\pm 1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \bigcup l_{\beta, h_\gamma^{\pm 1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$.

Дискретный аналог

Уравнение индукции (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

где напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ определяется по следующей формуле:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (4)$$

Для получения дискретного аналога для компоненты B_α индукции магнитного поля ($\mathbf{B} = \sum_{\beta=1}^3 B_\beta \mathbf{e}_\beta$) умножим уравнение (3) на $dt d\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha dt dS_\alpha$ (dS_α – элемент площади на грани $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$) и проинтегрируем по поверхности $S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ и по промежутку времени $[t_0, t]$ с использованием полностью неявной схемы. При вычислении интеграла по поверхности $S_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ используется теорема Стокса. В результате, дискретный аналог уравнения индукции (3) записывается в виде:

$$\frac{1}{\delta t} (B_\alpha - B_\alpha^0)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = -c \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}. \quad (5)$$

Здесь: $B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \equiv B_\alpha(P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t)$ – сеточные значения компоненты индукции магнитного поля на данном временном слое; $B_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}^0 \equiv B_\alpha(P_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t_0)$ – сеточные значения компоненты индукции магнитного поля на предыдущем временном слое, $E_{\gamma, h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \equiv E_\gamma(P_{h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, t)$ – сеточные значения компоненты напряженности электрического поля на ребрах контрольного объема ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$); $\delta t = t - t_0$ – шаг по времени; $\delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ – площадь соответствующей грани контрольного объема; конечная разность $\Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ определяется по формуле:

$$\Delta_\beta (\delta l_\gamma E_\gamma)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = E_{\gamma, h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \delta l_{\gamma, h_\beta^{1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} - E_{\gamma, h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)} \delta l_{\gamma, h_\beta^{-1/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, \quad (6)$$

где $\delta l_{\gamma, h_\beta^{\chi/2} h_\alpha^{\sigma/2}(i)}$ – длина соответствующего ребра контрольного объема $D_{(i)}$.

Сеточные значения $\operatorname{div} \mathbf{B}$ определяются во внутренних расчетных точках $P_{(i)}$ контрольных объемов $D_{(i)}$ по формуле:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}|_{P_{(i)}} = \frac{1}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha=1}^3 (B_{\alpha, h_\alpha^{1/2}(i)} \delta S_{h_\alpha^{1/2}(i)} - B_{\alpha, h_\alpha^{-1/2}(i)} \delta S_{h_\alpha^{-1/2}(i)}), \quad (7)$$

где $\delta V_{(i)}$ – объем $D_{(i)}$, и учтено направление внешней нормали $n_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \sigma e_{\alpha}$ на гранях контрольного объема $D_{(i)}$. Покажем, что если $\operatorname{div} B^0|_{P_{(i)}} = 0$, то и $\operatorname{div} B|_{P_{(i)}} = 0$, где $B_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ – определяется из уравнения (5). Умножим (5) на δt и подставим $B_{\alpha, h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} \delta S_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ из (5) в правую часть (7):

$$\operatorname{div} \mathbf{B}|_{P_{(i)}} = -\frac{c\delta t}{\delta V_{(i)}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{1/2}(i)} - \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{-1/2}(i)} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим выражение в правой части (8)

$$\begin{aligned} & \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{1/2}(i)} - \Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{-1/2}(i)} = \\ & = (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} + (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что (9) симметрично по индексам α и β :

$$\begin{aligned} & (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\alpha}^{1/2} h_{\beta}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\alpha}^{-1/2} h_{\beta}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} + (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} = \\ & = (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} + (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} = \\ & = (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{1/2}(i)} - (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} + (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})|_{h_{\beta}^{-1/2} h_{\alpha}^{-1/2}(i)} \end{aligned}$$

Следовательно свертка выражения (9) с символом Леви – Чивиты в правой части (8) равна нулю. Таким образом, решение дискретного аналога уравнения индукции (5) удовлетворяет сеточному уравнению неразрывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}|_{P_{(i)}} = 0. \quad (10)$$

Для того, чтобы решение дискретного аналога уравнения индукции (5) удовлетворяло сеточному уравнению неразрывности (10), необходимо выполнение (10) в начальный момент времени, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{B}(P_{(i)}, 0) = 0$.

Аппроксимация напряженности электрического поля на ребрах контрольного объема

Из (4) следует, что компоненты напряженности электрического поля на ребрах $l_{\gamma, h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ контрольного объема вычисляются по формуле:

$$-AE_{\gamma, h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \sum_{\tau, \rho=1}^3 \frac{\varepsilon_{\gamma\tau\rho}}{H_{\rho}} \left(u_{\tau} H_{\rho} B_{\rho} - \frac{\nu_m}{H_{\tau}} \frac{\partial (H_{\rho} B_{\rho})}{\partial x_{\tau}} \right) \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}. \quad (11)$$

Введем новые переменные $\Phi_{\rho} = H_{\rho} B_{\rho}$, $\rho = 1, 2, 3$; и суммарные потоки на ребрах контрольного объема, которые складываются из конвективного и диффузионного потоков:

$$J_{\gamma\tau\rho}|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \frac{\delta l_{\gamma}}{H_{\rho}} \left(u_{\tau} \Phi_{\rho} - \frac{\nu_m}{H_{\tau}} \frac{\partial \Phi_{\rho}}{\partial x_{\tau}} \right) \Big|_{h_{\beta}^{\chi/2} h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}. \quad (12)$$

Тогда, конечные разности $-A\Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}$ в (5) можно записать в виде:

$$-A\Delta_{\beta} (\delta l_{\gamma} E_{\gamma})_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)} = \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} \Delta_{\beta} J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_{\alpha}^{\sigma/2}(i)}, \quad (13)$$

а дискретный аналог (5) уравнения индукции в терминах переменных Φ_ρ принимает вид:

$$\frac{1}{\delta t} (\Phi_\alpha - \Phi_\alpha^0)_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)} A_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{\tau, \rho=1}^3 \varepsilon_{\gamma\tau\rho} \Delta_\beta J_{\gamma\tau\rho} \Big|_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}, \quad (14)$$

$$\text{где } A_{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)} = \frac{\delta S_{h_\alpha^{\sigma/2}(i)}}{\alpha, h_\alpha^{\sigma/2}(i)}.$$

Вопрос аппроксимации потоков $J_{\gamma\tau\rho}$ в задачах конвекции и диффузии подробно рассмотрен в [7]. Одной из рекомендованных к использованию схем аппроксимации суммарного потока является схема со степенным законом [7], которая и применяется в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов А.Ю. Семенов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Гореликов А.В. Алгоритм типа предиктор-корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Доклады Академии наук, 464 (5). С. 525-525.
3. Колмычков, В.В., Мажорова О.С., Федосеев Е.Э. Численный метод решения уравнений МГД // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2009.
4. Toth G. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // J. Comput. Phys., 161.
5. Попов, М.В. и Т. Г. Елизарова, 2013. Моделирование трехмерных МГД-течений в рамках магнитной квазигазодинамики. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 23: 32.
6. Куликовский А.Г. Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. – М.: Логос, 2005.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТИ

Галкин В. А., Дубовик А. О.
г. Сургут

Рассматривается течение вязкой проводящей жидкости в переменной во времени области в рамках модели слоистого течения жидкости. Исследуется явление тепловыделения в течении вязкой проводящей жидкости в результате вязкого трения, объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения. Представленные результаты актуальны в связи с исследованием способов повышения нефтеотдачи месторождений и создания отечественной технологии «цифровое месторождение».

Ключевые слова: слоистое течение, переменная область течения.

ABOUT MODELING A LAYERED FLUID FLOW IN A REGION CHANGING IN TIME

Galkin V. A., Dubovik A. O.

Surgut

The flow of a viscous conducting fluid in a time-variable region is considered within the framework of the model of a layered fluid flow. The phenomenon of heat generation during a viscous conductive fluid as a result of viscous friction, a volume effect by a magnetic field, and a motion of the boundary of a flow region is investigated. The presented results are relevant in connection with the study of ways to improve oil recovery and the creation of domestic technology "digital field".

Keywords: layer flow, variable flow region.

В рамках модели слоистого течения вязкой проводящей жидкости исследуется задача определения параметров жидкости (скорости, температуры, давления) в результате объемного воздействия магнитным полем и изменения во времени области течения. Данная задача связана с задачами оптимизации различных типов воздействия с целью управления динамикой несжимаемой жидкости при изменении во времени области течения [2]. Данный класс задач особо важен в связи с необходимостью создания отечественной технологии "цифровое месторождение" [1]. Исследуемое в данной работе явление тепловыделения в результате внутреннего трения в жидкости и Джоулева подогрева, для крупномасштабных течений может существенно влиять на характеристики течения [4, 6, 7], приводя к фазовым переходам, электрическим пробоям [5].

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД), описывающей течение вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени $\{x_1, x_2, x_3\} \in D(t)$, $t > 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{1}{c_p} \frac{\mu}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2. \quad (4)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение энергии может быть рассмотрено отдельно от остальных. Рассматривается слоистое течение жидкости вдоль магнитного поля. Вектор скорости слоистого течения жидкости имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \{u_1(t, x_2), 0, u_3(t, x_2)\}, \quad x_2 \in [0; l(t)], \quad t > 0.$$

В предположении единственности решения системы уравнений МГД, согласно [3], приведем следующий результат:

Теорема. Пусть $\mathbf{u}$ — вектор скорости слоистого течения жидкости, компоненты которого удовлетворяют уравнению типа теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}, \quad i = 1, 3,$$

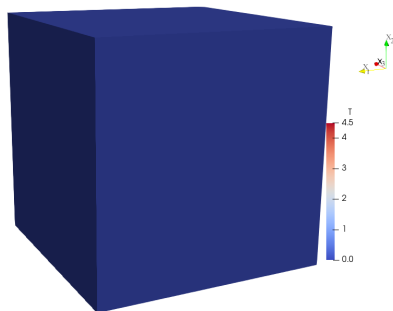


Рис. 1. Некоторая область, заполненная жидкостью, в условный момент времени $t=0$, цвет соответствует полю температуры

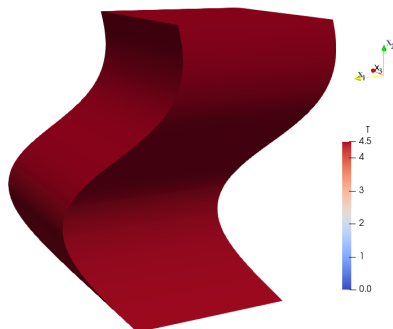


Рис. 2. Результат движения выбранного фрагмента области, заполненного жидкостью, в условный момент времени $t=1$, цвет соответствует полю температуры

кроме того, $\mu_m = \mu$, $\mathbf{H} = \alpha \mathbf{u}$, $p = -\frac{H^2}{8\pi}$ и поле температуры T является решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi}\right) \frac{\mu}{c_p} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right),$$

тогда четверка $(\mathbf{u}, p, \mathbf{H}, T)$ является решением уравнений МГД (1)–(4).

В качестве граничных и начальных условий для компонент вектора скорости и поля температуры задаются следующие условия

$$u_i|_{x_2=0} = u_i|_{x_2=l(t)} = 0, \quad u_i(0, x_2) = f_i(x_2), \quad i = 1, 3,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l(t)} = 0, \quad T(0, x_2) = 0.$$

Рисунки 1, 2 иллюстрируют тепловыделение в течении вязкой проводящей жидкости в результате объемного воздействия магнитным полем и движения границы области течения. Также рис. 1 и рис. 2 иллюстрирует движением фрагмента области, заполненного проводящей жидкостью.

Рассмотрена задача моделирования слоистого течения вязкой проводящей жидкости вдоль магнитного поля в области изменяющейся во времени. Решение данного класса задач связано с разработкой параллельного комплекса программ, позволяющего моделировать отклик пласта на управляющие воздействия, меняющие структуру течения.

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-01-00343, № 18-47-860004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетелин В.Б. Проблемы создания отечественной технологии "Цифровое месторождение". В сб.: Междунар. конф. "Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе". Сургут. 2014. С. 15–17.

2. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. М.: Изд-во Академиздатцентр «Наука». 2015. Т.463. №2. С. 149–151.
3. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Об управляемом слоистом течении вязкой несжимаемой жидкости в модели МГД // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 150–152.
4. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л. Изд-во. ЛГУ. 1978. 294 с.
5. Галич Н.Е. Тепловая неустойчивость и пробой движущихся вязких жидкостей в электрическом поле и при поглощении света // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 7. С. 10–17.
6. Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
7. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука. 1986. Ч. 1. 640 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ИЗ АНАЛИЗА ЕГО МИКРОСТРУКТУРЫ В ANSYS

Галиев И. М.

г.Сургут

В статье обосновывается численная модель, реализованная в программе ANSYS Material Designer, на основе которой может быть оценен весь набор упругих свойств композитного материала (модуль упругости E , модуль сдвига G , коэффициент Пуассона и т.д.).

Ключевые слова: гомогенизация, композит.

MULTIPLE SCALE ANALYSIS OF HETEROGENEOUS ELASTIC STRUCTURES USING HOMOGENIZATION THEORY AND FINITE ELEMENT METHOD

Galiev I. M.

Surgut

The article substantiates the numerical model implemented in the ANSYS Material Designer program, on the basis of which the entire set of properties of a composite material can be estimated (elastic modulus E , shear modulus G , Poisson's ratio, etc.).

Keywords: homogenization, composite.

Для гетерогенных материалов, таких как композиты, требуется большое количество параметров, определяющих свойства материала (модуля упругости E , модуля сдвига G , коэффициента Пуассона и т.д.), и экспериментальное определение этих многих свойств является утомительным и дорогостоящим процессом. Кроме того, значения этих свойств изменяются в зависимости от объемной доли и формы включений и так далее. Альтернативой или, по крайней мере, дополнением к экспериментам является использование методов гомогенизации для прогнозирования упругих свойств композита на основе упругих свойств компонентов (матрицы и армирующих элементов). Поскольку модели гомогенизации основаны на более или менее точном моделировании микроструктуры, эти модели также называют моделями микромеханики. Модели микромеханики можно разделить на эмпирические, полумэмпирические, аналитические и численные [1].

Для нахождения констант упругости (компонент тензора упругих постоянных) рассматриваются 6 вариантов нагрузки: 3 испытания на растяжение (вдоль осей X, Y, Z) (рис. 1a) и 3 испытания на сдвиг (XY, YZ, XZ) (рис. 1b). Эти 6 статических задач решаются методом конечных элементов.

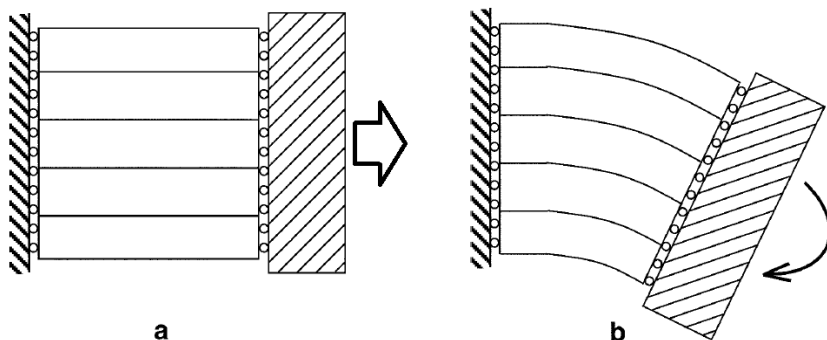


Рис. 1. Испытания на растяжение и на сдвиг [2]

В каждом случае применяется соответствующая макроскопическая деформация репрезентативного объема материала (RVE) [3]. ANSYS Material Designer предполагает, что рассматриваемый материал имеет репрезентативную микромасштабную структуру: репрезентативный элемент объема (RVE). Это небольшой объем материала, который все еще достаточно велик, чтобы демонстрировать правильные макроскопические свойства материала. Для периодических материалов это можно легко идентифицировать как одну элементарную ячейку. В периодическом материале эта элементарная ячейка повторяется во всех трех направлениях координат. Таким образом, она содержит всю информацию о материале и достаточно рассмотреть только поведение отдельной элементарной ячейки. Для неперiodических материалов, определение размера RVE является более сложным (рис.2).

Один из подходов к исследованию того, является ли рассматриваемый объем достаточно большим, чтобы быть репрезентативным, заключается в увеличении размера объема и исследовании, значительно ли изменяются макроскопические свойства. Если это так, начальный объем был недостаточно большим. Если макроскопические свойства остаются фиксированными, начальный объем, вероятно, подходит в качестве RVE. Более подробное обсуждение концепции RVE и элементарной ячейки см. в [3, 4].

Например, рассматривая растяжение вдоль оси X (рис.1a), на гранях, нормальных к оси X используются следующие граничные условия для перемещений u :

$$\begin{aligned} u_x(L_x, y, z) &= u_x(0, y, z) + \varepsilon L_x \\ u_y(L_x, y, z) &= u_y(0, y, z) \\ u_z(L_x, y, z) &= u_z(0, y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

на гранях, нормальных к оси Y:

$$\begin{aligned} u_x(x, L_y, z) &= u_x(x, 0, z) \\ u_y(x, L_y, z) &= u_y(x, 0, z) \\ u_z(x, L_y, z) &= u_z(x, 0, z) \end{aligned}$$

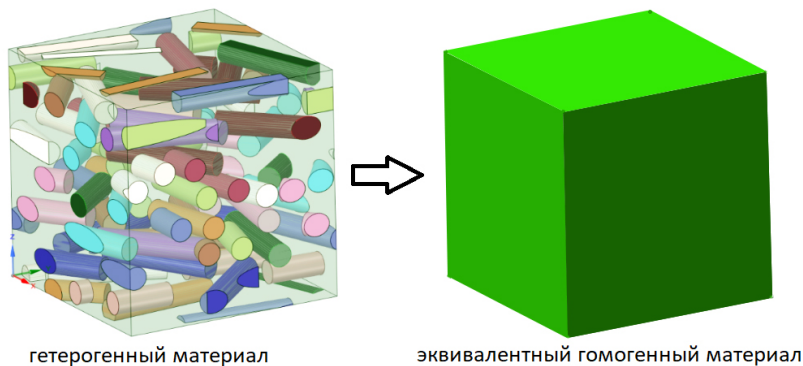


Рис. 2. Репрезентативный объем (RVE) хаотически армированного композита. Слева – эквивалентный объем, обладающий эффективными свойствами

на гранях, нормальных к оси Z :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, L_z) &= u_x(x, y, 0) \\ u_y(x, y, L_z) &= u_y(x, y, 0) \\ u_z(x, y, L_z) &= u_z(x, y, 0) \end{aligned}$$

где L_x, L_y, L_z - размеры RVE по оси x, y и z соответственно, $\varepsilon = 0.01$ - задаваемая константа (среднее значение компонент тензора деформации).

Будем считать, что материалы матрицы и армирующих элементов репрезентативного объема непрерывны – являются сплошными средами и их деформации подчиняется закону Гука. Кроме этого примем гипотезу эквивалентной гомогенности: возможность замены неоднородной среды, эквивалентной однородной, обладающей эффективными свойствами (рис.2). Для вычисления эффективных свойств, а именно эффективных констант упругости C_{ijkl}^{eff} в программе ANSYS Material Designer используется следующее уравнение:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{eff} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (2)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV$ - среднее значение тензора деформации по репрезентативному объему V , $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV$ - среднее значение тензора напряжений.

Далее, используя теоремы об осреднении, представленные в [5], будет дано обоснование правомерности использования граничных условий (1) и осреднения (2).

Уравнение равновесия среды в отсутствии объемных сил:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Тогда, используя данное выражение и формулу Остроградского-Гаусса, получим для среднего значения тензора деформации:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \sigma_{ik}) dV = \frac{1}{V} \oint x_j \sigma_{ik} n_k d\Omega \quad (3)$$

где Ω - поверхность, ограничивающая объем V .

Введем определение эффективных констант упругости C_{ijkl}^{eff} и эффективного тензора деформации ε_{mn}^{eff} (8) на основании следующего уравнения:

$$M_i = \oint e_{ijk} x_j (\sigma_{kl} n_l) d\Omega \stackrel{def}{=} \oint e_{ijk} C_{klmn}^{eff} \varepsilon_{mn}^{eff} x_j n_l d\Omega \quad (4)$$

где M_i - i -я компонента момента внешних (поверхностных) сил, действующих на репрезентативный объем, e_{ijk} - символ Леви-Чивиты для записи векторного произведения, ε_{mn}^{eff} - эффективный тензор деформаций.

Левую часть уравнения (4) можно привести к виду:

$$\oint e_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l d\Omega = e_{ijk} \oint x_j \sigma_{kl} n_l d\Omega = e_{ijk} \bar{\sigma}_{kj} V \quad (5)$$

Правую часть уравнения (4) можно привести к виду:

$$\oint e_{ijk} C_{klmn}^{eff} \varepsilon_{mn}^{eff} x_j n_l d\Omega = e_{ijk} C_{klmn}^{eff} \oint \varepsilon_{mn}^{eff} x_j n_l d\Omega \quad (6)$$

Теперь введем гипотезу

$$u_i = \varepsilon_{ik}^{eff} x_k \quad (7)$$

т.е. перемещения линейно зависят от координат. Скорее всего данную гипотезу можно считать приемлемой при малых деформациях и небольших размерах репрезентативного объема. На основании данной гипотезы сформированы граничные условия (1).

Замечая, что

$$\oint x_k n_j d\Omega = \int \frac{\partial x_k}{\partial x_j} dV = V \delta_{kj}$$

где δ_{kj} - символ Кронекера и используя гипотезу (7) выражение (6) запишется в виде

$$e_{ijk} C_{klmn}^{eff} \varepsilon_{mn}^{eff} \oint x_j n_l d\Omega = e_{ijk} C_{klmn}^{eff} \varepsilon_{mn}^{eff} V \delta_{jl} \quad (8)$$

Используя формулу Остроградского-Гаусса среднее значение тензора деформации можно представить в следующем виде:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{2V} \oint (u_i n_j + u_j n_i) d\Omega \quad (9)$$

Подставляя (7) в (9) получим

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2V} \oint \left(\varepsilon_{ik}^{eff} x_k n_j + \varepsilon_{jk}^{eff} x_k n_i \right) d\Omega = \frac{1}{2V} \left[\varepsilon_{ik}^{eff} \oint x_k n_j d\Omega + \varepsilon_{jk}^{eff} \oint x_k n_i d\Omega \right] = \\ &= \frac{1}{2V} \left[\varepsilon_{ik}^{eff} V \delta_{kj} + \varepsilon_{jk}^{eff} V \delta_{ki} \right] = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{ij}^{eff} + \varepsilon_{ji}^{eff} \right] = \varepsilon_{ij}^{eff} \end{aligned} \quad (10)$$

Используя полученные выражения (5), (8), (10), уравнение (4) запишется в виде (2):

$$\bar{\sigma}_{kj} = C_{kjm n}^{eff} \bar{\varepsilon}_{mn}$$

Заключение

Для обоснования численной модели, реализованной в программе ANSYS Material Designer было введено определение эффективных констант упругости C_{ijkl}^{eff} (4) и введена гипотеза (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Barbero E.J. Introduction to Composite Materials Design. 3rd Edition. CRC Press, Boca Raton, FL, 2017.
2. Kouznetsova V., Brekelmans W.A.M., Baaijens F.P.T. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous material. Computational Mechanics, 27, 2001, p.34-48.
3. Kouznetsova V. Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
4. Li S., Jeanmeure L.F.C., Pan Q.J. A composite material characterisation tool: UnitCells, J Eng Math, 2015, 95: 279.
5. Hashin Z. Theory of fiber reinforced materials. NASA, Washington, 1972.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНИ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ

Самарина О. В., Семенов С. П., Славский В.В.

г. Ханты-Мансийск

В данной работе представлен геометрический подход к анализу данных дистанционного зондирования земли, основанный на геометрии три-тканей В. Бляшке. Представлены инвариантные характеристики относительно максимально широкой "топологической" группы преобразований, такие как поверхностный элемент, связность ткан и кривизна. Инварианты изображения относительно различных групп преобразований являются наиболее эффективными характеристиками изображения, которые можно использовать в решении широкого класса задач обработки и анализа данных дистанционного зондирования земли.

Ключевые слова: инварианты, три-ткань, многоканальные изображения.

Введение. Нефтегазовый сектор является динамично развивающейся отраслью экономики. В настоящее время ведутся активные работы по освоению новых месторождений, строительству трубопроводов, терминалов, предприятий переработки и нефтехимии. Перспективы освоения месторождений, расположенных на территориях Крайнего Севера и в пределах арктического шельфа, существенно расширяют территории нефтегазодобычи.

В связи с этим в целях оптимизации производственных процессов, повышения эффективности государственного контроля и объективности экологических оценок всё более важной становится задача использования данных дистанционного зондирования земли (далее – ДДЗ). ДДЗ обладают такими важными показателями как оперативность, доступность; достоверность и актуальность получаемой информации; а также высокая пространственная точность исходных данных и результатов их обработки.

Создание и разработка новых, более эффективных методов анализа и обработки ДДЗ является одним из актуальных направлений в области анализа и обработки цифрового изображения. В работе представлен подход к обработке ДДЗ с помощью теории три-тканей, разработанной В. Бляшке [1].

Данные многозональной съемки в цифровом виде можно рассматривать как многомерную матрицу, где каждая двумерная матрица является снимком земной поверхности в определенной зоне электромагнитного спектра. К примеру, изображение, полученное

со спутника Landsat ТМ представляет собой снимок земной поверхности в семи зонах спектра (синяя, зеленая, красная, ближняя инфракрасная (ИК), две средних ИК, дальняя ИК) .

В данной работе предлагается перейти к рассмотрению трехмерной матрицы ДДЗ, то есть выбрать из набора зон спектра три зоны в различных электромагнитных спектрах. К примеру, для снимка со спутника Landsat ТМ остановиться на рассмотрении синего, зеленого и красного цветовых спектров.

Основные результаты. Представим многоканальный снимок дистанционного зондирования земли в виде набора n неотрицательных функций $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$ в некоторой области на плоскости.

В нашем случае выбранные для рассмотрения зоны спектра составят набор из трех неотрицательных функций $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ в некоторой области D на плоскости. Семейства линий уровня этих функций тогда будут иметь вид:

$$L_1 = \{(x, y) : u_1(x, y) = \text{const}\}$$

$$L_2 = \{(x, y) : u_2(x, y) = \text{const}\}$$

$$L_3 = \{(x, y) : u_3(x, y) = \text{const}\}.$$

Будем называть эти три семейства линий топографической сеткой (или три-тканью) данного снимка [1; 2]. Функцией три-ткани называется любая функция $W(u_1, u_2, u_3)$ не тождественно равная константе, такая что в области D выполняется тождество:

$$W(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) \equiv 0.$$

Это выражение выражает зависимость, связывающую три функции в окрестности данной точки. При самом общем преобразовании изображения:

$$x = \phi_1(x', y'), \quad y = \phi_2(x', y'),$$

функция три-ткани не меняется и, следовательно, является топологическим инвариантом снимка .

Предположим, что в точке $P(0) = (x(0), y(0))$ выполняется условие $u_1(x(0), y(0)) = u_2(x(0), y(0)) = u_3(x(0), y(0)) = 0$.

Разложим функцию ткани W в степенной ряд по u_1, u_2, u_3 :

$$W = W_1 u_1 + W_2 u_2 + W_3 u_3 + \frac{1}{2} W_{11} u_1^2 + W_{12} u_1 u_2 + \dots,$$

где W_i и W_{ij} – частные производные первого и второго порядка функции ткани $W(u_1, u_2, u_3)$ по переменным u_i .

Тогда справедливо определение таких инвариантных характеристик ткани как поверхностный элемент – Ω , связность ткани – γ и кривизна – k [1]. Эти величины определяются следующими выражениями:

$$\Omega = W_1 W_2 [du_1 du_2] = \dots,$$

где точки обозначают круговую перестановку индексов 1, 2, 3;

$$\gamma = - \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial u_i} \ln(W_i) du^i + d \ln(W_1 W_2 W_3);$$

$$k = A_{23} + A_{31} + A_{12},$$

$$\text{где } A_{rs} = \frac{1}{W_r W_s} \frac{\partial^2}{\partial u_r \partial u_s} \ln \frac{W_r}{W_s} = \frac{W_{rrs}}{W_r^2 W_s} - \frac{W_{rss}}{W_s^2 W_r} + \frac{W_{rs}}{W_r W_s} \left(\frac{W_{ss}}{W_s^2} - \frac{W_{rr}}{W_r^2} \right).$$

Заключение

Предложенный в работе подход к анализу ДЗЗ, основанный на теории три-ткани В. Бляшке, является актуальным и перспективным направлением в области анализа и обработки снимков земной поверхности.

Поверхностный элемент, связность и кривизна Бляшке три-ткани могут быть использованы в качестве инвариантных характеристик относительно группы диффеоморфизмов снимка при решении таких задач цифровой обработки ДЗЗ, как предварительная обработка изображений, задачи классификации и поиска соответствия по образцу, специализированная тематическая обработка и многие другие.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. Пер. с нем. М.: Физмат, 1959. 144 с.
2. Samarina O.V., Slavsky V.V. W. Blaschke's theory application in digital image processing // Journal of Mathematical Sciences and Applications 1.2, 2013. P. 17–23.

О ПАРАДОКСЕ ДАЛАМБЕРА-ЭЙЛЕРА

Соколов С. Б.

г.Сургут

Парадокс Даламбера-Эйлера – известное положение гидродинамики, согласно одной из формулировок которого при равномерном и прямолинейном движении тела внутри безграничной невязкой и несжимаемой жидкости результирующая сила сопротивления жидкости движению тела равна нулю. Существующее объяснение парадокса сводится к тому, что формулировка предполагает отсутствие вязкости, которая видится главной причиной сопротивления движению в реальной среде. В статье обосновывается, что ключевую роль играет условие абсолютно несжимаемой жидкости. Этим допущением исключается распространение упругих волн, которые имеют место в реальной жидкости. В результате имеет место нарушение закона сохранения энергии или движение тела становится невозможным. Таким образом, формулировка парадокса представляется ошибочной.

Ключевые слова: парадокс Даламбера, давление, поток энергии, закон сохранения энергии.

ON D'ALEMBERT-EULER PARADOX

Sokolov S. B.

Surgut

The D'Alembert-Euler paradox is a known hydrodynamic problem, which one of the formulations is, the drag force is zero on a body moving straightforward and with constant velocity inside an infinite inviscid and incompressible fluid. The existing explanation of the

paradox is the formulation implies the absence of viscosity, which is seen the main reason of resistance to motion in a real environment. It is substantiated in the paper that the key role belongs to the condition of an absolutely incompressible fluid. This assumption eliminates the propagation of elastic waves that occur in reality. As a result the violation of energy conservation law takes place or the motion of the body becomes impossible. Thus, the paradox formulation seems erroneous.

Keywords: D'Alembert's paradox, pressure, energy flux, energy conservation law.

Парадокс Даламбера-Эйлера – известное положение гидродинамики идеальной жидкости, согласно одной из формулировок которого при равномерном и прямолинейном движении тела внутри безграничной жидкости, результирующая сила сопротивления жидкости движению тела равна нулю. Под идеальной жидкостью понимается жидкость невязкая и абсолютно несжимаемая. Существующее объяснение парадокса сводится к тому, что в реальной среде не выполняются те предположения, на которых строится обоснование парадокса [4].

С точки зрения баланса энергии, механизм проявления сил сопротивления движению состоит в том, что энергия, которую движущееся тело теряет в виде механической работы над окружающими его другими телами или средой, не возвращается ему, по крайней мере в эквивалентном количестве. Каким именно образом происходит безвозвратная потеря энергии, значения не имеет.

История парадокса подробно описана в [5]. Объяснение парадокса было дано Сен-Венаном в 1847 году. Согласно ему, причиной является допущение об отсутствии вязкости у жидкости. Работа сил вязкости, должна обеспечивать трансформацию механической энергии тела в тепловую, что является необратимым термодинамическим процессом. Впоследствии такое объяснение было развито Прандтлем [2] с привлечением представлений о пограничном слое.

В статье приводится анализ парадокса с позиций теории движения энергии (ТДЭ) [3]. Общее объяснение, связанное с некорректностью исходных предположений остается. Однако, ключевым с этой точки зрения является не отсутствие вязкости, а предположение абсолютно несжимаемой жидкости. Цель – обосновать, что неправомерна сама формулировка парадокса, которая ведет к нарушению принципа сохранения энергии. В дальнейшем, для простоты будет рассматриваться движение сферического тела. При этом форма тела не влияет на общий характер выводов.

Анализируя механизм движения тела в жидкости, независимо от того, обладает она вязкостью или нет, очевидно, что в его окрестности имеет место движение и самой жидкости. Те ее элементы, которые вступают в соприкосновение с передней поверхностью движущегося тела, неизбежно перемещаются вдоль его боковой поверхности по криволинейным траекториям. Это обстоятельство означает появление импульса и кинетической энергии хотя бы у некоторой массы жидкости.

Энергия в окружающей тело жидкости появляется в результате работы силы, с которой тело воздействует на нее. В рамках распространенного подхода в механике, анализ взаимодействия обычно и ограничивается таким объяснением. С точки зрения ТДЭ, само появление энергии обусловлено проходящим через поверхность тела потоком энергии, плотность которого $\mathbf{j}$ выражается в соответствии с так называемой второй теоремой Умова

$$p\mathbf{v} = e\mathbf{c} = \mathbf{j}, \quad (1)$$

где p – давление, возникающее на границе тела и жидкости; $\mathbf{v}$ – вектор скорости движения границы жидкого объема; $\mathbf{c}$ – вектор скорости движения энергии; e – плотность

энергии. В реальной жидкости передача энергии от тела и ее дальнейшее распространение является волновым процессом, в результате которого энергия "уносится" в пространство и для самого тела безвозвратно теряется, в чем и проявляется действие силы сопротивления, как было отмечено выше. Таким образом, в реальной жидкости сам факт обтекания тела жидкостью, которая изначально была неподвижна, является признаком действующей силы сопротивления. Однако, есть смысл более детально рассмотреть процесс работы, который происходит на границе тело-жидкость.

Пусть при движении тела его граница за малый промежуток времени t переместится из положения 1 в положение 2 (рис.1) на расстояние $v \cdot t$, где v – скорость движения произвольного участка поверхности по нормали. При смещении участка массы жидкости у поверхности тела испытывает деформацию (сжатие – у фронтальной поверхности, разрежение – у тыловой), граница которой распространится от исходного положения на расстояние $c \cdot t$ в положение 3. Распространение сжатия-разрежения происходит в форме упругой волны и c – скорость этой волны, эквивалентная скорости звука в жидкости

$$c = \sqrt{K/\rho},$$

где K – модуль объемной упругости жидкости; ρ – плотность жидкости. Также скорость волны c качественно характеризует размер области влияния поверхности тела: чем больше скорость, тем больше область влияния.

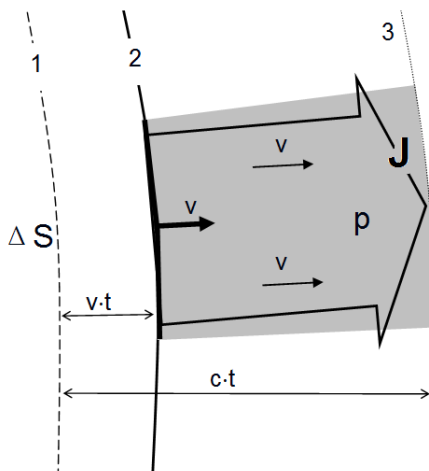


Рис. 1. Схема образования потока энергии на участке поверхности тела, движущегося в жидкости. J – поток энергии; v – нормальная скорость перемещения участка поверхности; c – скорость упругой волны; ΔS – площадь участка поверхности; p – изменение давления в жидкости

Для массы жидкости у участка поверхности площадью ΔS , которая в исходном состоянии имела объем

$$V = \Delta S c \cdot t, \quad (2)$$

степень сжатия пропорциональна смещению границы.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta S v \cdot t}{\Delta S c \cdot t} = \frac{v}{c}. \quad (3)$$

В результате деформации здесь неизбежно происходит изменение давления

$$p = K \frac{v}{c}. \quad (4)$$

У фронтальной поверхности давление повышается по отношению к исходному, у тыловой – понижается.

Согласно граничным условиям на поверхности тела жидкость в пределах показанной бесконечно тонкой области также приобретает скорость v и, соответственно, импульс с плотностью ρv . В силу волнового характера распространения импульса и энергии, они покидают область у поверхности тела и переносятся в жидкости как отдельная фаза волны. Это значит, что импульс и энергия у поверхности тела непрерывно «обновляются». Тогда приращение количества движения (КД) жидкости за бесконечно малый отрезок времени dt эквивалентно импульсу жидкости в граничной области, т.е. $d(\text{КД}) = \rho v \Delta S c \cdot dt$. Используя 2 закон Ньютона можно определить силу, с которой тело действует на жидкость в каждый момент времени на участке поверхности площадью ΔS :

$$F = \frac{d()}{dt} = \rho v c \cdot \Delta S, \quad (5)$$

где $\rho v c = p$ – давление (формула Жуковского [1]). Работа, совершенная силой, обеспечивает изменение энергии жидкости. За отрезок времени dt на рассматриваемом участке она эквивалентна энергии нового элемента волны и равна

$$p \Delta S v \cdot dt = \rho v^2 c \Delta S \cdot dt. \quad (6)$$

Плотность потока энергии, который проходит в жидкость через участок поверхности, согласно (1) равна

$$j = p v = \rho v^2 c. \quad (7)$$

Здесь $\rho v^2 = e$ – объемная плотность энергии. Полагая, что плотность кинетической энергии равна $\rho v^2 / 2$, то очевидно, что она составляет только половину всей передаваемой энергии. Другая половина энергии является потенциальной энергией деформации (сжатия) объема жидкости и связана с давлением, так что

$$e = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p^2}{2K}. \quad (8)$$

Выражение (8) показывает, что скорость, приобретаемая жидкостью на границе с движущимся телом, неизбежно связана с изменением давления в ней, которое, в свою очередь обусловлено объемной деформацией объемов жидкости. Это обстоятельство ведет к еще одному противоречию с реальным процессом в условиях парадокса Даламбера. Если не учитывать происхождение давления в жидкости, как результат объемной деформации, то предположение абсолютно несжимаемой жидкости обуславливает запрет на появление давления в ней, возможность совершения работы над ней и, в конечном итоге, на ее движение, в результате чего возникает противоречие с граничными условиями. Этот вывод можно продемонстрировать другим путем.

Учитывая происхождение давления в жидкости с ее объемной деформацией, условие абсолютно несжимаемой жидкости можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\Delta V}{V} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(-\frac{p}{K} \right). \quad (9)$$

При возрастании коэффициента объемной упругости растет связанная с ним скорость упругой волны c . В случае заданного значения потока энергии $j=ec$ при возрастании значения c плотность энергии $e=\rho v^2$ должна пропорционально уменьшаться. Происходить это может только за счет уменьшения скорости v движения жидкости на границе с поверхностью тела. Следовательно, должна уменьшаться скорость и самой границы в силу граничного условия. Принимая во внимание (7), это означает уменьшение производимой работы $p v$ и потока энергии. Таким образом, при возрастании упругости жидкости должна уменьшаться скорость тела в ней. В пределе, когда $(K \rightarrow \infty)$, для выполнения равенства скорость движения стремится к нулю ($v \rightarrow 0$). Таким образом, условие абсолютно несжимаемой жидкости приводит к выводу о том, что в такой жидкости движение тела принципиально невозможно.

Предположение о возможности движения тела в абсолютно несжимаемой жидкости имеет следствием нарушение закона сохранения энергии. При какой угодно ненулевой скорости движения тела ($v \neq 0$) из уравнения (6) следует, что работа, которая совершается телом над жидкостью в единицу времени $p v$ будет иметь конечное значение. При этом энергия, которую получает жидкость в виде потока энергии в результате этой работы, оказывается неограниченной $\rho v^2 c$ из-за бесконечно большого значения скорости упругой волны ($c = \infty$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах (1899)/ Полн.собр.соч. Т.7. Гидравлика. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – С.58-147.
2. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т.1. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1933.
3. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах (1874). В кн. Н.А.Умов. Избранные сочинения. Под ред. С.А.Предводителяева. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – С.151-201
4. Физическая энциклопедия. Под ред. Прохорова А.М. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
5. Grinmerg G., Pauls W., Frisch U. Genesis of d'Alembert's paradox and analytical elaboration of the drag problem. *Physica D*, **238**, 2008. PP.1878-1886.

ГРУППА МН(2) ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Дубовик О. А., Дубовик А. О.

г. Сургут

Многие свойства специальных функций математической физики, называемых цилиндрическими: Ганкеля, Макдональда, Неймана, а также Г-функции и В-функции Эйлера связаны с группой движений псевдоевклидовой плоскости. Предлагаемая конструкция представлений данной группы приводит к появлению названных функций в качестве элементов матриц-ядер интегральных представлений. Это позволяет расширить упомянутый список, присоединив к нему и функции Бесселя с произвольным

индексом. Отсюда появляется возможность с единой точки зрения охватить широкое многообразие свойств всего класса цилиндрических функций.

Ключевые слова: представления групп, инфинитезимальные операторы, функции Бесселя.

GROUP $MH(2)$ MOVEMENT OF PSEUDO EUCLIDIC PLANE AND SPECIAL FUNCTIONS ASSOCIATED WITH IT

Dubovik O. A., Dubovik A. O.

Surgut

Many properties of special functions of mathematical physics, called cylindrical: Han- kel, Macdonald, Neumann, as well as the Euler Γ -function and B-function are associated with the group of motions of the pseudo-Euclidean plane. The proposed construction of the representations of this group leads to the appearance of these functions as elements of the matrix of the kernels of integral representations. This allows you to expand the mentioned list by adding to it the Bessel functions with an arbitrary index. From this, it is possible from a single point of view to cover the whole variety of properties of a whole class of cylindrical functions.

Keywords: group representations, infinitesimal operators, Bessel functions.

Специальные функции математической физики с теоретико-групповой точки зрения исследовались многими авторами. Выделим работы Н.Я. Виленкина [1–3] и И.М. Гельфанда [4], оказавших определяющее влияние на развитие данного подхода. Среди работ иностранных авторов отметим [5–7].

Многочисленные свойства функций Ганкеля, Макдональда, Неймана, Γ -функций и В-функций Эйлера связаны с группой $MH(2)$ и изложены Н.Я. Виленкиным [3]. Предлагаемая конструкция представлений данной группы позволяет пополнить этот список, присоединив к нему функции Бесселя с произвольным индексом. Это позволяет единым образом изучать весь класс цилиндрических функций – наиболее часто встречающийся в приложениях. В частности, получены рекуррентные соотношения и дифференциальные уравнения для цилиндрических функций. Данная работа является продолжением [8, 9].

1. Группа движений псевдоевклидовой плоскости $MH(2)$ определяется преобразованиями [1]

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \operatorname{ch} \varphi + x_2 \operatorname{sh} \varphi + p, \\ x'_2 = x_1 \operatorname{sh} \varphi + x_2 \operatorname{ch} \varphi + q, \end{cases} \quad (1)$$

где $-\infty < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Поставив всякому преобразованию (1) в соответствие матрицу

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi & p \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

реализуем группу $MH(2)$ как группу матриц третьего порядка. Отметим две подгруппы $MH(2)$. Первая состоит из гиперболических вращений $g(0,0,\varphi)$. Будем обозначать ее Ω . Вторая E_2 состоит из параллельных переносов $g(p,q,0)$ и изоморфна евклидовой

плоскости. Поэтому Ω можно рассматривать как группу автоморфизмов абелевой группы E_2 . Следовательно $MH(2)$ является полупрямым произведением абелевой группы E_2 и группы ее автоморфизмов Ω

$$MH(2) = E_2 * \Omega,$$

с умножением $(b_1, A_1)(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 b_2, A_1 A_2)$, где $g = (b, A)$, $b \in E_2$, $A \in \Omega$.

Представление группы $MH(2)$ рассматривается в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(A)$ на Ω . Операторы представления $T_\chi(g)$ зададим формулой [8]

$$T_\chi(g_0)f(A) = \chi\left(A^{-1}b_0\right)f\left(A_0^{-1}A\right), \quad (2)$$

где χ — одномерное представление абелевой группы E_2 .

Не трудно проверить мультипликативное свойство

$$T_\chi(g_1) \cdot T_\chi(g_2) = T_\chi(g_1 \cdot g_2)$$

и, значит, $g \rightarrow T_\chi(g)$ — представление.

Всякое одномерное представление χ группы E_2 определяется парой комплексных чисел (χ_1, χ_2)

$$\chi(b) = \exp(\chi_1 p + \chi_2 q).$$

В таком случае группа X одномерных представлений E_2 изоморфна двумерному комплексному линейному пространству C_2 . Если $\chi \in X$, то $\chi_A: b \rightarrow \chi(A^{-1}b)$ также является элементом группы X . Тогда X представимо в виде объединения непересекающихся классов транзитивности по отношению к группе Ω . Каждому классу соответствует одно и то же представление (2) группы $MH(2)$. В таком случае, чтобы задать эти представления, достаточно взять один элемент $\chi \in X$ из каждого класса транзитивности. Классу транзитивности, состоящему из пар комплексных чисел $(R\chi_y, R\chi_y)$ соответствует представление

$$T_R(g)f(y) = \exp\{R(-p \operatorname{ch} y + q \operatorname{sh} y)\}f(y - \varphi). \quad (3)$$

Относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \overline{f_2(y)} dy$$

представление унитарно тогда и только тогда, когда R — чисто мнимое число. При $R \neq 0$ представление неприводимо [8].

3. Представление группы $MH(2)$ в пространстве H бесконечно-дифференцируемых финитных функций на мнимой прямой с носителем, не содержащим точку $y=0$ имеет вид

$$T_R(g)f(y) = \exp\left\{R\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)p + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)q\right)\right\}f(\exp(-\varphi)y).$$

Заметим, что H распадается в прямую сумму двух инвариантных подпространств, в каждом из которых $T_R(g)$ действует неприводимо и эквивалентно представлению (3).

Рассмотрим другую реализацию представлений $T_R(g)$, поставив каждой функции $f(y) \in H$ в соответствие пару функций

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(y)(\pm y)^{\lambda-1} dy, |\arg(\pm y)| = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Преобразование (4) сводится к преобразованию Меллина [1]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda) x^{-\lambda} d\lambda.$$

Используя формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda) x^{-\lambda} d\lambda,$$

можно установить формулу обратного преобразования для (4) [8]

$$f(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda}) (-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda}) y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}, \quad (5)$$

где $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Будем обозначать пару, соответствующую функции $T_R(g)f(y)$, через $Q_R(g)F \equiv (Q_R(g)F_+, Q_R(g)F_-)$. Имеем

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} T_R(g)f(y) (\pm y)^{\lambda-1} dy, \quad (6)$$

для подгруппы Ω

$$Q_R(g)F(\lambda) = \exp\{\lambda\varphi\} F(\lambda),$$

для подгруппы E_2

$$T_R(g)f(y) = \exp\left\{R\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)p + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)q\right)\right\} f(y).$$

Подставляя последнее выражение в (6) и применяя (5), получим

$$\begin{aligned} Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{R\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)p + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)q\right)\right\} (\pm y)^{\lambda-1} dy \times \\ &\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sin \pi \hat{\lambda}} \left[F_+(\hat{\lambda}) (-y)^{-\hat{\lambda}} + F_-(\hat{\lambda}) y^{-\hat{\lambda}} \right] d\hat{\lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

При вещественном $R \neq 0$, $0 < \operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) < 1$ и $p \neq q$ возможна перестановка порядка интегрирования и операторы (7) переходят в операторы вида

$$Q_R(g)F_{\pm}(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_+(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} + \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) F_-(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\pm\mp}(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left\{R\left(-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)p + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)q\right)\right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy. \end{aligned}$$

В таком случае, операторы (8) являются интегральными операторами в пространстве пар функций $F(\lambda) = (F_+, F_-)$

$$Q_R(g)F(\lambda) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda, \hat{\lambda}, R, g) F(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda}$$

с ядрами—матрицами

$$K(\lambda, \hat{\lambda}; R; g) = \begin{pmatrix} K_{+-} & K_{++} \\ K_{--} & K_{-+} \end{pmatrix}.$$

4. При $p = 0$, $Rq \neq 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ \frac{Rq}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy.$$

Интеграл выражается через функции Ганкеля [1]

$$K_{\pm\mp} = \frac{1}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (\pm (\lambda - 1) \mp (-\hat{\lambda})) + i \frac{\pi}{2} v \right\} H_v^{(1)}(Rq) - \right. \\ \left. - \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (\mp (\lambda - 1) \pm (-\hat{\lambda})) - i \frac{\pi}{2} v \right\} H_v^{(2)}(Rq) \right),$$

где $v = \lambda - \hat{\lambda}$.

Наибольший интерес при этом вызывает появление функций Бесселя

$$J_{-v}(Rq) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ \frac{Rq}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right\} t^{v-1} dt, Rq > 0, J_{-v} = \frac{1}{2} (H_{-v}^{(1)} + H_{-v}^{(2)}).$$

В таком случае

$$K_{++} = \frac{1}{2i \sin \pi \hat{\lambda}} J_{-v}(Rq), K_{--} = \frac{i}{2 \sin \pi \hat{\lambda}} J_v(Rq), \\ K_{+-} = \frac{1}{4i \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \{i\pi\lambda\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp \{-i\pi\lambda\} H_v^{(2)}(Rq) \right), \\ K_{-+} = \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \{-i\pi\hat{\lambda}\} H_v^{(1)}(Rq) + \exp \{i\pi\hat{\lambda}\} H_v^{(2)}(Rq) \right) = \\ = \frac{i}{4 \sin \pi \hat{\lambda}} \left(\exp \{-i\pi\lambda\} H_{-v}^{(1)}(Rq) + \exp \{i\pi\lambda\} H_{-v}^{(2)}(Rq) \right).$$

При $q = 0$, $Rp > 0$

$$K_{\pm\mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \hat{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left\{ -\frac{Rp}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\hat{\lambda}} dy,$$

и получаем следующее выражение для матриц—ядер

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \pi v} & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \hat{\lambda}} & \frac{\sin \pi \hat{\lambda}}{\sin \pi \lambda} \end{pmatrix} \frac{1}{\pi i} K_v(Rp),$$

где $K_v(z)$ — функция Макдональда, которая имеет вид [1]

$$K_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{-z \operatorname{ch} t \pm vt\} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{z}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right\} t^{\pm v-1} dt.$$

При $Rp = -Rq > 0$ получим выражение ядра через Γ -функцию Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp \{-t\} t^{z-1} dt$$

$$K_{\pm \mp} = -\frac{1}{4\pi \sin \pi \bar{\lambda}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \{-Rpy\} (\pm y)^{\lambda-1} (\mp y)^{-\bar{\lambda}} dy.$$

Как и в предыдущем случае, получим

$$K = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{\sin \pi v}{\sin \pi \bar{\lambda}} & \frac{\sin \pi \lambda}{\sin \pi \bar{\lambda}} \end{array} \right) \frac{(Rp)^{-v}}{2\pi i} \Gamma(v).$$

5. Инфинитезимальные операторы представления $T_R(g)$, соответствующие однопараметрическим подгруппам $g(p, p, 0)$, $g(p, p, 0)$, $g(0, 0, \varphi)$ имеют вид

$$T_+ f(y) = -Ry f'(y), T_- f(y) = -Ry^{-1} f(y), T_\varphi f(y) = -y \frac{d}{dy} f(y).$$

При замене $f(y)$ на $F(\lambda)$ эти операторы переходят в операторы соответственно

$$Q_+ F(\lambda) = -R \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) F(\lambda + 1), Q_- F(\lambda) =$$

$$= -R \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) F(\lambda - 1), Q_\varphi F(\lambda) = \lambda F(\lambda).$$

Из равенства для элементов группы

$$g(p, -p, 0) g(0, q, 0) = g(p, -p + q, 0) = g(0, 0, \varphi) g(0, r, 0) g(0, 0, -\varphi),$$

где $q > 2p > 0, -p + q = r \operatorname{ch} \varphi, p = r \operatorname{sh} \varphi, r^2 = q(-2p + q), \exp \{2\varphi\} = \frac{q}{-2p+q}$ в результате дифференцирования соответствующего равенства для операторов представления $Q(g)$ по p при $p=0$ получим при $R=1$

$$Q_+ Q(0, q, 0) = -\frac{dQ(0, q, 0)}{dq} + \frac{1}{q} (Q_\varphi Q(0, \varphi, 0) - Q(0, \varphi, 0) Q_\varphi).$$

Операторы слева и справа в последнем выражении интегральные, что влечет соответствующие равенства для их ядер-матриц. Последнее равносильно четырем равенствам для их элементов. Сравнивая элементы K_{--} и K_{++} , получим

$$J_{v+1}(q) = -\frac{dJ_v(q)}{dq} + \frac{v}{q} J_v(q), J_{-v-1}(q) = \frac{dJ_{-v}(q)}{dq} - \frac{v}{q} J_{-v}(q). \quad (9)$$

Сравнение элементов на главной диагонали матрицы K_{-+} и K_{+-} приводит к точно таким же соотношениям для функций Ганкеля.

Равенство для элементов группы

$$g(p, p, 0) g(0, q, 0) = g(p, p + q, 0) = g(0, 0, \varphi) g(0, r, 0) g(0, 0, -\varphi)$$

где $q > 0$, $p + q = r \operatorname{ch} \varphi$, $p = r \operatorname{sh} \varphi$, $r^2 = q(2p + q)$, $\exp \{2\varphi\} = \frac{q}{2p + q}$ после дифференцирования соответствующего равенства для операторов представления $Q(g)$ по p при $p = 0$ приводит к аналогичному соотношению между инфинитезимальными операторами и операторами представления

$$Q_- Q(0, q, 0) = \frac{dQ(0, q, 0)}{dq} + \frac{1}{q} (Q_\varphi Q(0, \varphi, 0) - Q(0, \varphi, 0) Q_\varphi).$$

и соответственно формулам для функций Бесселя

$$J_{v-1}(q) = \frac{dJ_v(q)}{dq} + \frac{v}{q} J_v(q), \quad -J_{v-1}(q) = \frac{dJ_{-v}(q)}{dq} + \frac{v}{q} J_{-v}(q). \quad (10)$$

Заметим, что операторы повышения и понижения индексов Q_+ и Q_- действуют тождественно с точностью до замены $-v$ на v . Это приводит к одним и тем же формулам.

Сложение и вычитание первых равенств в (9) и (10) приводит к рекуррентным соотношениям

$$\frac{1}{2} (J_{v-1}(q) + J_{v+1}(q)) = \frac{v}{q} J_v(q), \quad \frac{1}{2} (J_{v-1}(q) - J_{v+1}(q)) = \frac{d}{dq} J_v(q).$$

Последовательное применение операторов Q_+ и Q_- приводит к дифференциальному уравнению Бесселя

$$Q_+ Q_- J_v(q) = J(q), \quad \left(-\frac{d}{dq} + \frac{v-1}{q} \right) \left(\frac{d}{dq} + \frac{v}{q} \right) J_v = J_v.$$

После раскрытия скобок, получим

$$\frac{d^2 J_v}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{dJ_v}{dq} + \left(1 - \frac{v^2}{q^2} \right) J_v = 0.$$

Замена в приведенных выше соотношениях группового элемента $g(0, q, 0)$ на $g(p, 0, 0)$ позволяет автоматически переписать полученные формулы для функций Макдональда, что подчеркивает объединяющее начало группы $MH(2)$ в изучении цилиндрических функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-47-860005 p_a).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. 2-е. изд. – М.: Наука. 1991. 576 с.
2. Vilenkin N.Ja. Klimuk A.U. Representation Theory and Special Functions: Recent Advances. Kluwer Acad. Publ. 1995. 511 p.
3. Vilenkin N.Ja. Klimuk A.U. Representation Theory and Special Functions. V.1. Kluwer Acad. Publ. 1991. 610 p.
4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. Гипергеометрические функции над произвольным полем // УМН. Т. 59. № 5(359). 2004. С. 29–100.

5. Baricz A. Generalized Bessel functions of the first kind. Springer. 2010. 227 p.
6. Bohra N., Ravichandran V. On confluent hypergeometric functions and generalized Bessel functions // Analysis Math. 2017. V. 43. I. 4. p. 533–545.
7. Aomoto K., Kita M. Theory of hypergeometric functions. Springer. 2011. p. 335.
8. Дубовик О.А. Представление группы конформных движений евклидова пространства и функции Лежандра на разрезе // Сиб. мат. журн. 1980. № 4. С. 45–49.
9. Дубовик О.А., Дубовик А.О. Представления группы движений псевдоевклидовой плоскости и функции Бесселя // Вестник кибернетики. № 3 (31). Сургут: Из-во СурГУ. 2018. С. 51–57.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. –М.: Наука. 1973. 296 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1.–М.: Наука. 1969. 344 с.

ОТЕЧЕСТВЕННАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА АРХИТЕКТУРЫ MIPS

Моргун Д. А., Девцын И. Н.
г. Сургут

Ключевые слова: вычислительная техника, MIPS, КОМДИВ.

RUSSIAN MIPS ARCHITECTURE COMPUTING HARDWARE

Morgun D. A., Devitsyn I. N.
Surgut

Keywords: computing hardware, MIPS, KOMDIV.

Современная ситуация на рынке вычислительной техники не позволяет использовать доступные массовому потребителю микропроцессоры в ответственных системах управления, решающих критически важные задачи, в том числе в оборонно-промышленном комплексе. Академик В.Б. Бетелин в своём докладе «О российском «интернете вещей» 2 апреля 2019 г. отметил, что сегодня «мы живем в условиях киберопасности», т.к., например, изделия корпорации Intel могут включать от одного до трех вспомогательных процессорных ядер, они аппаратно защищены от операционной системы и прикладных программ с 2008 г., весь сетевой трафик на входе и выходе системы на базе процессора Intel может подвергаться скрытому мониторингу, а также такую систему нельзя программно защитить от внешних воздействий.

Вычислительная техника разработки ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН лишена несанкционированных аппаратных закладных элементов. Имеет российскую сертификацию для применения в защищённых системах. В условиях действующих и усиливающихся санкций, использование вычислительной техники отечественной разработки для одних – осознанная необходимость, для других – является обязательным или может стать таковым в ближайшем будущем. Кроме того, производство надёжных и производительных микропроцессоров – системообразующий элемент отечественных суперЭВМ, а без использования суперЭВМ невозможно занять конкурентные позиции на рынке отраслей военно-промышленного, топливно-энергетического комплекса, включая ядерную энергетику, авиакосмической промышленности, машиностроения и т.д. [1, 2].

Сегодня ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН предлагает вычислительную технику собственной разработки, спектр изделий включает:

- 32-разрядные контроллеры, 64-разрядные системы на кристалле (СнК/SoC), контроллеры интерфейсов, коммутаторы;
- модули и системы на основе микросхем собственной разработки;
- операционные системы, прикладное ПО.

Особенный интерес представляет семейство систем на кристалле архитектуры КОМДИВ-32 и КОМДИВ-64 – это многофункциональные микропроцессоры, на основе которых производится вычислительная техника общего назначения: персональные компьютеры, серверы, коммутаторы, моноблоки, планшеты; технические средства специального назначения и даже промышленные контроллеры. Развитие процессоров с архитектурой КОМДИВ приведено на рис. 1. Данные микропроцессоры обладают рядом преимуществ, среди них: наличие специализированных векторных сопроцессоров, что позволяет повысить производительность выполнения инженерных и научных расчётов [3], встроенные функции для цифровой обработки сигналов, позволяющие выполнять четыре бабочки Фурье – 40 операций за 12 процессорных тактов [4], низкое тепловыделение и энергопотребление по сравнению с конкурентными решениями, поддержка современных программно-аппаратных интерфейсов, промышленные диапазоны рабочих температур.

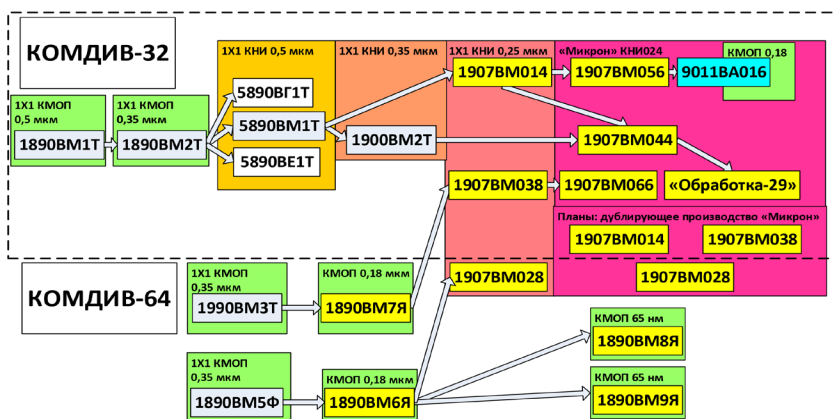


Рис. 1. Развитие микропроцессоров с архитектурой КОМДИВ

Архитектура КОМДИВ-64 полностью включает в себя набор инструкций MIPS64. MIPS (сокращение от названия соответствующего проекта Стэнфордского университета, англ. Microprocessor without Interlocked Pipeline Stages) – система команд и микропроцессорных архитектур, разработанные компанией MIPS Computer Systems (в настоящее время Wave Computing) в соответствии с концепцией проектирования процессоров RISC. Архитектуру MIPS часто изучают в программе курса «Компьютерная архитектура» в университетах и технических лицеях. В настоящее время различные реализации MIPS используются в основном во встроенных системах, например, в смартфонах, маршрутизаторах, шлюзах. До конца 2006 года они применялись и в компьютерах SGI. К концу 1980-х и 1990-х эта архитектура широко использовалась многими компаниями. С середины до конца 1990-х годов каждым третьим микропроцессором на рынке был процессор под управлением MIPS.

Рассмотрим некоторые изделия, разработанные в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, подробнее.

«Моноблок-ВМ8» (ЭВМ «Багет Р2А») работает на базе 64-разрядного 2-ядерного суперскалярного RISC-микропроцессора 1890ВМ8Я с архитектурой КОМДИВ-64, под управлением ОС Astra Linux или Debian. Технические характеристики приведены в табл. 1. Предназначен для оборудования доверенных автоматизированных рабочих мест в системах с повышенными требованиями к информационной безопасности: в государственных структурах, банках, промышленности и прочих ответственных учреждениях, оснащённых доверенными вычислительными системами с критической миссией и защищёнными от несанкционированного доступа.

Таблица 1

Основные технические характеристики ЭВМ «Багет Р2А»

Процессор	1890ВМ8Я, тактовая частота до 800 МГц
ОЗУ	DDR3L, 2 канала по 4 Гбайт SODIMM
Видеоконтроллер	интегрированный в микропроцессор
Встроенное оборудование	микрофон, картридер MicroSDHC/SDHC, динамики 2х2 Вт
Внешние порты	4 USB 2.0, 2 Ethernet 10/100/1000Base-T, вход микрофона, аудиовыход 3,5 мм
Дисплей	ЖК-матрица с LED-подсветкой, диагональ экрана 60 см (23,6")
Габаритные размеры	385 x 585 x 55 мм
Вес	7 кг

Контроллер Багет-ПК (плата БТ74-201) – целевая ЭВМ на основе 64-разрядного микропроцессора 1890ВМ108 с архитектурой КОМДИВ-64. Предназначен для автоматизации автозаправочных станций, управления технологическим оборудованием на транспорте, в том числе железнодорожном, в различных областях промышленности, жилищно-коммунального и сельского хозяйства. Работает под управлением ОС РВ Багет. Технические характеристики приведены в табл. 2. Задачи, решаемые изделием БТ74-201:

- сбор информации с различного типа устройств с интерфейсами RS485 (уровнемер, датчик аварийной сигнализации и т.п.);
- приём сигналов от дискретных и числоимпульсных датчиков и выдача управляющих воздействий на исполнительные органы различных типов;
- контроль технологических параметров;
- автоматическое включение и выключение многофункционального оборудования, логическое, программно-логическое управление технологическими агрегатами;
- задачи контроля управления и логического состояния оборудования, функции аварийных защит и блокировок;
- обмен данными в распределённых системах, обмен данными с программируемыми контроллерами, работа с интеллектуальными датчиками.

Для вычислительной техники с архитектурой MIPS ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН разрабатывает программное обеспечение, предназначенное не только для разработчиков, но и для пользователей. Для встраиваемых систем, включая контроллер Багет-ПК, разработана специализированная операционная система реального времени.

Таблица 2

Основные технические характеристики изделия «плата БТ74-201»

Процессор	1890BM108, тактовая частота до 800 МГц
ОЗУ	DDR3 1 канал 1 Гбайт
Загрузочное ПЗУ	16 Мб
РПЗУ	16 Мб
Интерфейсы	I2C 1 канал, Ethernet 100 Мбит/с 1 канал, RS-232 1 канал, SPI, GPIO 11 линий, UART 3 канала, EXT_IO 24 линии
Часы реального времени (RTC)	есть
Потребляемая мощность	не более 4 Вт
Габаритные размеры	100 x 108 x 29 мм



Рис. 2. Изделия «Моноблок-ВМ8» (слева) и «Контроллер Багет-ПК» (справа)

ОС2000 (также «ОС РВ Багет» и «Багет 2.0») – операционная система реального времени (ОСРВ), разработанная ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН для ЭВМ серии «Багет» на микропроцессорах MIPS архитектуры R3081, КОМДИВ-32, RM7000, КОМДИВ-64, КОМДИВ-128 и Intel (архитектуры i486 и совместимых с ним). ос2000 предназначена для разработки программного обеспечения для систем (программно-аппаратных комплексов), работающих в режиме жесткого реального времени для крайне оперативной реакции на внешние события. Разработка ос2000 базируется на следующих принципах:

- соответствие международным стандартам;
- мобильность;
- масштабируемость;
- использование концепции микроядра;
- использование объектно-ориентированного подхода;
- кросс-разработка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетелин В.Б., Велихов Е.П., Кушнirenко А.Г. Массовые суперкомпьютерные технологии – основа конкурентоспособности национальной экономики в XXI веке. // Информационные технологии и вычислительные системы, 2007, № 2, с. 3-10.
2. Бетелин В.Б., Кушнirenко А.Г., Райко Г.О. Проблемы обеспечения роста производительности отечественных суперЭВМ в период до 2020 года // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2010. – № 3. – С. 15-18.

3. Аряшев С.И., Барских М.Е., Бобков С.Г., Зубковский П.С., Ивасюк Е.В. Реализация базовых функций задачи горения на основе операции FMA специализированного векторного сопроцессора // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). – 2014. – № 4. – С. 19-24.
4. Аряшев С.И., Бобков С.Г., Зубковский П.С. Суперскалярный 64-х разрядный RISC микропроцессор встроенного применения // Проблемы разработки перспективных микроэлектронных систем. М.: ИППМ РАН, 2006. С. 269-273

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ DJANGO

Штанов Ю. Н., Зиганшин Р. А.

г. Сургут

Разработан программный комплекс для автоматизированного создания электронных учебно-методических комплексов с использованием системы управления контентом Django, которая является библиотекой языка Python для создания web-приложений. Программный комплекс позволяет создавать в формате DOCX: рабочую программу дисциплины, аннотацию рабочей программы и комплекс оценочных средств. Программный комплекс является бесплатным программным продуктом и использует лицензию GPL и работает под управлением операционной системы Linux.

Ключевые слова: генерирование электронных учебно-методических комплексов; Django; Python; Linux.

SOFTWARE FOR GENERATION OF EDUCATIONAL-METHODICAL COMPLEXES USING DJANGO

Shtanov Yu. N., Ziganshin R. A.

Surgut

A software package has been developed for the automated creation of electronic methodic complexes using the Django content management system, which is a library for the Python language for creating web applications. The software allows you to create in DOCX format: a work program of discipline, an annotation of the work program and a set of assessment tools. The software package is a free software product and uses the GPL license and runs under the Linux operating system.

Keywords: generation of electronic educational and methodical complexes; Django; Python; Linux.

Существуют задачи в которых приходится работать с документами в которых меняется только небольшая его часть, как раз для этих задач отлично подходит Django [2;4]. В качестве примера в которых используется Django можно привести известные приложения: Instagram, Youtube, Google и др. Разработка программного комплекса для автоматизированной генерации электронных учебно-методических комплексов (ЭУМК) является весьма перспективным направлением [1;3;5].

С использованием Django разработан программный комплекс [6] для автоматизации процесса создания ЭУМК по дисциплине на примере Тюменского индустриального университета. Программный комплекс обеспечивает решение следующих задач:

1. автоматизацию процесса создания рабочих программ (РП) на основе заданной структуры и наличия доступа к готовому контенту, отражающему те или иные содержательные блоки рабочей программы;
2. повышение качества рабочих программ за счет использования готовых фрагментов контента, подготовленного в соответствии с ФГОС и учебного плана;
3. оптимизацию процесса тематического планирования за счет внедрения механизмов проверки распределения часов.

За надежное хранение данных необходимых для генерации ЭУМК отвечает СУБД MySQL. Администратор может загрузить учебный план из файла *xlsx* с помощью *orepuxl* [7], данные компетенций с помощью *rpython-dosx* [8]. Для работы программного комплекса необходим компьютер с 4-х ядерным процессором, 1 Гб оперативной памяти и 100 Мб свободного места на жестком диске, а также операционная система Linux. При тестировании использовался одноплатный компьютер Orange Pi One Plus [9].

Алгоритм работы с программным комплексом можно описать следующим образом:

1. создание РП на основании выбранного учебного плана;
2. заполнение цели и задачи, содержание разделов и тем дисциплины и др.;
3. заполнение перечня тем лабораторных/практических работ, рейтинговой системы;
4. заполнение карты обеспеченности дисциплины учебной и учебно-методической литературой из базы издательств Юрайт или Лань;
5. на основании рейтинговой системы и наличия зачета/экзамена в учебном плане заполняются поля в комплексе оценочных средств (КОС);
6. выполняем выгрузку ЭУМК с сервера.

В результате был разработан программный комплекс для генерирования электронных учебно-методических комплексов с использованием Django, который обладает следующими преимуществами: нет необходимости искать и работать с учебным планом, ФГОС, методическими указаниями по оформлению рабочих программ — все подгружается автоматически из базы данных; можно работать в любое время, в любом месте и на любом устройстве; комплекс оценочных средств формируется на основании содержания РП, остается только внести необходимую информацию о задании, список вопросов к зачету/экзамену и т.п.; является бесплатным программным продуктом имеющим лицензию GPL [10] и работает под свободной операционной системой Linux; и самое главное на разработку ЭУМК сейчас тратится в разы меньше времени 1-2 рабочих дней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Генератор рабочих программ // Томск: ТУСУР. URL: <https://workprogram.tusur.ru> (Дата обращения 01.03.2019).
2. Дронов В. А. Django. Практика создания Web-сайтов на Python. СПб.: БХВ-Петербург, 2016. 528 с.
3. Кудрявшев А.В. Система автоматизированной генерации рабочих программ дисциплин на основе сетевой базы данных // Педагогическое образование. 2017. № 6. С. 68-73.
4. Мелихов А. Ю., Юхимук Р. Ф. Создание Web-приложений для генерации отчетов на базе каркасной системы управления контентом «Django» // Вестник Югорского государственного университета. 2011. Т. 22. В. 3. С. 27-30.
5. ПО «РПД» // ММИС Лаборатория. URL: <https://www.mmis.ru/programs/rpd> (Дата обращения 01.03.2019).

6. Штанов Ю. Н., Зиганшин Р. А. Генератор рабочих программ высшего образования // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018665333. – М.: Роспатент, 2018.
7. Gazoni E., Clark C. Openpyxl // URL: <https://openpyxl.readthedocs.io> (Дата обращения 01.03.2019).
8. Canny S. Python-docx // URL: <https://python-docx.readthedocs.io> (Дата обращения 01.03.2019).
9. Orange Pi One Plus // Shenzhen Xunlong Software CO., Limited. URL: <http://www.orangepi.org/> (Дата обращения: 01.03.2019).
10. GNU General Public License // Free Software Foundation URL: <https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0> (Дата обращения: 01.03.2019).

ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНОЙ ПРОЕКЦИИ ЧЕБЫШЕВА ТЕРРИТОРИИ ХАНТЫ-МАНСЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА

Назин А. Г.

г. Сургут

Построение проекции Чебышева включает в себя решение двух задач [1]:

- Нахождение значений частных масштабов длин в точках картографируемой области по заданному постоянному значению логарифма частного масштаба длин m на контуре этой области;
- Определение прямоугольных координат x , y точек проекции по имеющимся значениям частных масштабов длин в точках картографируемой области

Первая задача сводится к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} &= 0, \\ \ln \mu|_{\Gamma} &= \ln r_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$

где q , λ – изометрические координаты, μ – частный масштаб длин.

Известно, что решение уравнения Лапласа (1) можно записать в виде [1]:

$$\ln \mu = \int_{k=0}^n a_k \psi_k + \int_{k=1}^n b_k \theta_k, \quad (2)$$

где ψ_k и θ_k гармонические полиномы.

Используя теорему Чебышева – Граве получим переопределенную систему для определения $a_k b_k$:

$$\int_{k=0}^n a_k \psi_k(q_i, \lambda_i) + \int_{k=1}^n b_k \theta_k(q_i, \lambda_i) - \ln r_i = 0; \quad i = \overline{1, m} \quad (3)$$

Таким образом, частный масштаб в любой точке может быть рассчитан по формуле (2).

Определим прямоугольные координаты.

$$\begin{cases} x_q = \mu \cos \gamma \\ y_q = \mu \sin \gamma \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_\lambda = -\mu \sin \gamma \\ y_\lambda = \mu \cos \gamma \end{cases} \quad (5)$$

Где γ – сближение меридианов, которые можно определить по формуле [2]:

$$\gamma_i = \int_{k=1}^n a_k \theta_k(q_i, \lambda_i) - \int_{k=1}^n b_k \psi_k(q_i, \lambda_i), \quad i = \overline{1, m}$$

В силу конформности отображения для прямоугольных координат можно записать [3]:

$$\begin{aligned} x_i &= \int_{k=1}^n (A_k \psi_k(q_i, \lambda_i) - B_k \theta_k(q_i, \lambda_i)) \\ y_i &= \int_{k=1}^n (A_k \theta_k(q_i, \lambda_i) + B_k \psi_k(q_i, \lambda_i)) \end{aligned} \quad (6)$$

Где A_k и B_k – действительные числа, ψ_k и θ_k гармонические полиномы. Дифференцируя (6) и учитывая выражения (4), (5) получим переопределенную систему для определения A_k и B_k :

$$\mu_i \cos \gamma_i = \int_{k=1}^n (k A_k \psi_{k-1}(q_i, \lambda_i) - k B_k \theta_{k-1}(q_i, \lambda_i))$$

$$\mu_i \sin \gamma_i = \int_{k=1}^n (k A_k \theta_{k-1}(q_i, \lambda_i) + k B_k \psi_{k-1}(q_i, \lambda_i))$$

Далее по формулам (6) находим прямоугольные координаты.

В системе MathCAD был произведен расчет конформной проекции Чебышева для территории Ханты-Мансийского автономного округа, см. рис.1.



Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаевский Л. М. Математическая картография, учебник для вузов, Москва: Изд-во «Златоуст», 1998.
2. Kresho Frankich, Optimization of the geographic map projections for Canadian territory, Simon Fraser University, 1983.
3. Daniel Szatmari, Optimization of conformal cartographic projections for the Slovak Republic according to Chebyshev's theorem, Slovak Journal of Civil Engineering vol. 23, 2015, No. 4, 19-24.

О КЛАССИФИКАЦИИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ В БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Гавриленко А. В.

*Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного
округа – Югры «Сургутский государственный университет»*

gavrilenko.anna.v@gmail.com

Моделирование биологических систем и анализ медико-биологических данных является очень сложной задачей для исследователя. Кроме того, биологические системы зачастую бывает невозможно описать с помощью простых периодических законов, потому что при одинаковых внешних условиях и начальных параметрах они ведут себя непредсказуемо, что является одним из признаков хаотических динамических систем. В работе представлена классификация осцилляций для моделирования в биомеханических системах.

Ключевые слова: биомеханика, механограммы, корреляционный анализ, моделирование биомеханических систем.

ON CLASSIFICATION OF OSCILLATIONS FOR MODELING IN BIOMECHANICAL SYSTEMS

Gavrilenko A. V.

Surgut State University, gavrilenko.anna.v@gmail.com

Modeling biological systems and analyzing biomedical data is a very difficult task for a researcher. In addition, biological systems are often impossible to describe using simple periodic laws, because under the same external conditions and initial parameters they behave unpredictably, which is one of the signs of chaotic dynamical systems. The paper presents the classification of oscillations for modeling in biomechanical systems.

Keywords: biomechanics, mechanograms, correlation analysis, modeling of biomechanical systems.

Построение адекватной математической модели сложного биомеханического объекта – весьма трудная задача, так как в каждый момент времени состояние системы уникально и невоспроизводимо. Однако на сегодняшний день существуют различные модели, описывающие тремор как автоколебания, вызванные неустойчивостью рефлекторных реакций и описанные нелинейными динамическими уравнениями [1]. Так же известны модели, в которых тремор возникал в результате нелинейных механических взаимодействий в мышцах, были предложены В.В. Кузнецовым [2, 3, 4].

Механические движения тела человека не ограничиваются только произвольными движениями, огромную роль играют и произвольные движения тела человека. Наиболее распространёнными произвольными движениями являются колебательные движения. В свою очередь такие движения могут быть как периодическими, аperiodическими и хаотическими. Введем более полную классификацию сигналов получаемый при регистрации произвольных и произвольных движений:

1. **Хаотический сигнал.** Сигнал на всём интервале времени изменяется в широких пределах, отсутствует выраженная повторяемость (обнаружить равнозначные сигналы в заданных пределах не удаётся), АЧХ сигнала имеет сложную структуру и варьируется на всем моделируемом промежутке времени. Пример такого сигнала на рис.1, на рисунке представлена запись треморограммы конечности человека. Как

2. **Квазипериодический сигнал.** В сигнале присутствуют периодические процессы, которые можно увидеть даже визуально, но АЧХ имеет сложную структуру. Пример на рис.2, представлена запись треморограммы испытуемого при выполнении теппинг теста без физических ограничений.

3. **Периодический сигнал.** Сигнал характеризуется строгим периодическим процессом, в АЧХ выражены 3-4 частоты (практически без промежуточных значений). Пример на рис.3.

4. **Вырожденный сигнал.** Сигнал вырождается в прямую линию, колебательных процессов не наблюдается.

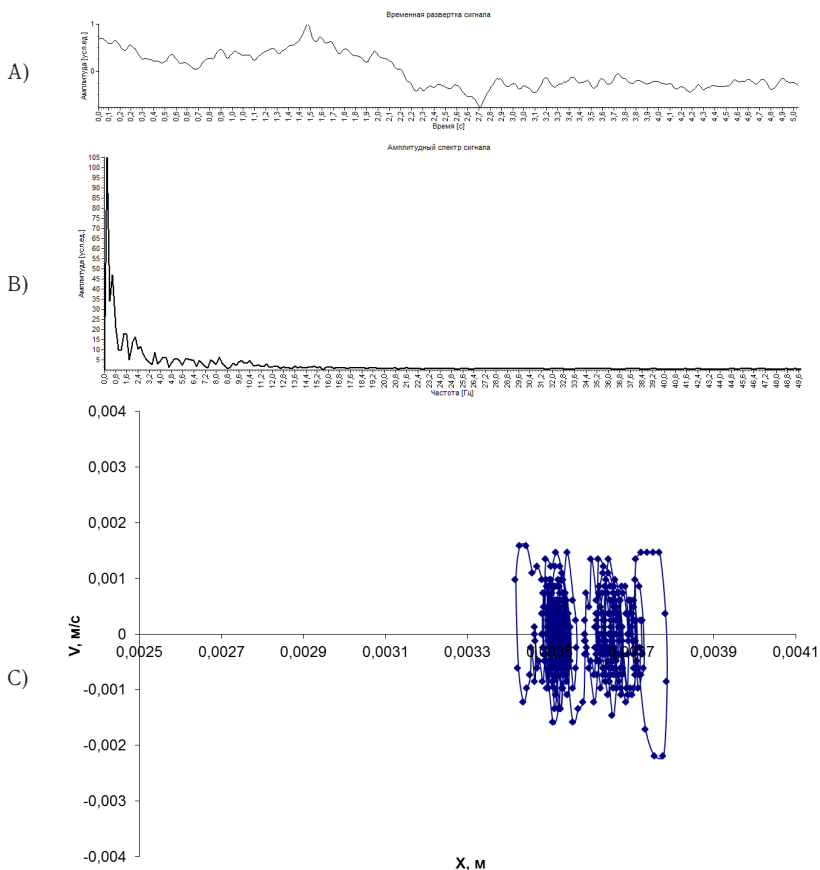


Рис. 1. А – регистрируемый сигнал тремора; В – амплитудно-частотная характеристика сигнала; С – фазовая плоскость вектора с координатами x_1 , x_2 , где $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = dx_1/dt$, для испытуемого 30 лет, без патологий

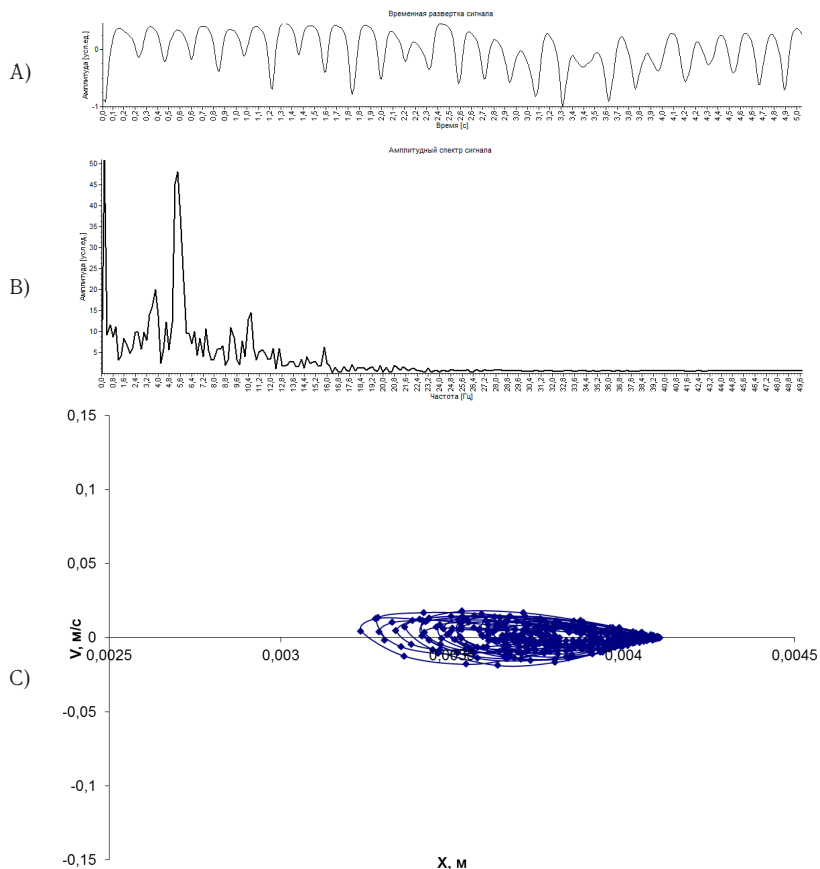


Рис. 2. А – регистрируемый сигнал тестинг теста без физических ограничений; В – амплитудно-частотная характеристика сигнала; С – фазовая плоскость вектора с координатами x_1 , x_2 , где $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = dx_1/dt$, для испытуемого 30 лет, без патологий

Данная классификация имеет прямые аналогии со сложными биологическими динамическими системами (таблица 1).

Физиологические системы организма характеризуются механическим колебанием тканей. Это наиболее справедливо для сердечно-сосудистой и опорно-двигательной систем, нарушения деятельности в которых приводит не только к снижению уровня качества жизни, но и провоцирует развитие более грубой патологии [5, 6].

Любое движение может быть описано функцией $y = f(x)$ в рамках спектрального анализа (например, теории Фурье), которая может быть разложена в ряд, содержащий

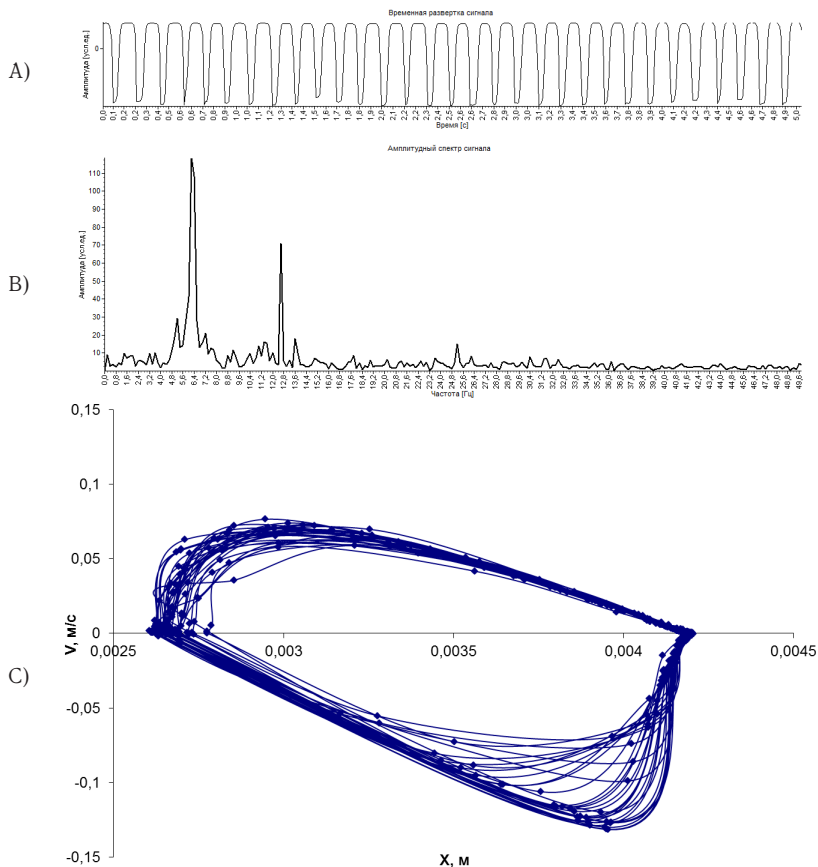


Рис. 3. А – регистрируемый сигнал тестинг теста в условиях физических ограничений; В – амплитудно-частотная характеристика сигнала; С – фазовая плоскость вектора с координатами x_1, x_2 , где $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = dx_1/dt$, для испытуемого 30 лет, без патологий

гармонические функции. Иными словами в математическом плане любое движение можно представить как суперпозицию колебательных движений. Поскольку произвольное движение является неперенным спутником двигательной активности всех органов и систем и отражает колебания различной частоты, то оно, например, тремор, тоже описывается набором гармонических функций. Очевидно, что все внешние воздействия можно рассматривать как управляющие внешние драйвы (в наших моделях вида 1 слагаемое $u(t)$).

Таблица 1

Соответствие классов сигналов и реальных состояний сложных биологических динамических систем

Хаотический сигнал	Нормогенез сложных биологических динамических систем в нормальном состоянии ФСО.
Квазипериодический сигнал	Нормогенез сложных биологических динамических систем в возбужденном состоянии или локализованный патогенез.
Периодический сигнал	Патогенез сложных биологических динамических систем.
Вырожденный сигнал	Патогенез с высоким уровнем генерализации патологических процессов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-47-860005 р_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдман А.Г. Механические свойства скелетной мышцы и их регуляция нервной системой / А.Г. Фельдман // Физиология движений. – Л.: Наука, 1976. – С.38-68
2. Кузнецов В.В. Вибрационные свойства мышечных сокращений./В.В. Кузнецов // Тезисы докладов I Всесоюзного биофизического съезда, М., 1982. – Т.2. – с.62-63.
3. Кузнецов В.В. Автоколебания биомеханических систем / В.В. Кузнецов // Биологическая, медицинская кибернетика и бионика. Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1984. – с.91-95.
4. Кузнецов В.В. Моделирование движений человека и его адаптация к информационным и физическим нагрузкам /В.В. Кузнецов, Ю.А. Серела, О.М. Царькова // Тр. 2-й Международной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных наук», Изд. «Техносфера - Информ», М., 1994. - Т.2, ч.1. - с. А24-А26.
5. Kejonen, P. The relationship between anthropometric factors and bodybalancing movements in postural balance / P. Kejonen, K. Kauranen, H. Vanharanta // Arch. Phys. Med. Rehabil. – 2003. – V. 84. – P. 17.
6. Olivier, I. Effects of attentional focus on postural sway in children and adults / I. Olivier, E. Palluel, V. Nougier // Exp. Brain Res. – 2008. – V. 185. – P. 341.

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бурыкин Ю. Г., Деркач И. П.
г. Сургут

Предлагается регистрация движений звеньев биомеханической системы посредством видеокамеры на основе системы распознавания образов. Регистрация пальцевого тремора и движений пальцев осуществляется путём идентификации 5 меток (маркеров), сгенерированных с помощью свободной библиотеки ArUco. Видеотрекинг фаланг

пальцев позволяет получать информацию о параметрах движений и объективно оценивать двигательные функции человека-оператора, а также оптимизировать взаимодействие с управляемыми им техногенными системами.

Ключевые слова: биомеханика, видеоанализ, маркер, трек, тремор.

Burykin Yu. G., Derkach I. P.

Surgut

In this article it is offered the way of links of the biomechanical system registration. System is based on image detection on video files with using video camera. Registration of finger tremor and finger movements is implemented by recognition of 5 markers generated using by opensource library ArUco. Phalanges video tracking allows to get movement parameters information and objectively evaluate human operator functions. Received parameters will help to optimize interaction with man-made man-driven systems.

Keywords: biomechanics, video analysis, marker, track, tremor.

Видеоанализ движений человека применяется в клинической практике с целью экспресс-диагностики нарушения двигательных функций по характерным паттернам [1, 4]. Недостатком систем видеоанализа являются сбои при обработке изображений, вызванные выпадением одного из маркеров из поля наблюдения или невозможностью распознавания двух маркеров, расположенных вблизи оси объектива одной из камер. В этом случае, для восстановления утерянной информации о положении маркера в пространстве в заданный момент времени применяют математические алгоритмы [5-7].

Для регистрации тремора используются датчики, основанные на принципе тензометрии, где регистрируется прикладываемое усилие, емкостные датчики, регистрирующие изменение магнитного поля при движении конечности, акселерометрические датчики, основанные на регистрации ускорения движения. Также наряду с использованием различных датчиков, применяют видеокамеры и компьютерные программы детектора движений [2, 8].

Физиологический тремор может усиливаться в определённых психоэмоциональных состояниях при страхе, волнении, а также при приёме некоторых лекарственных препаратов. В этой связи регистрация тремора актуальна для экспресс-оценки состояния человека-оператора.

Для регистрации пальцевого тремора и движения пальцев использовались следующие компоненты: цифровая камера высокого разрешения (1080p) с частотой кадров 50 fps, Samsung NX300; штатив; 5 меток, сгенерированных с помощью свободной библиотеки ArUco, имеющих линейные размеры 10x10 мм; крепления для меток, хомуты; стол, стул на ножках, подставка под верхнюю конечность; ЭВМ на архитектуре x64; интерпретатор Python 3.6.8; GIMP – фоторедактор с открытым исходным кодом; свободные библиотеки: OpenCV, NumPy, Pandas, Matplotlib.

Настройка системы осуществлялась путём калибровки камеры, посредством которой были получены трёхмерные координаты в пространстве для каждой метки, распознанной на фотографии или видеокadre. Началом системы координат являлся фокус объектива камеры. Единицы измерения для системы могут быть выбраны произвольно, но важно, чтобы на всех этапах настройки системы они оставались одними и теми же.

Калибровка производилась для определенного фокусного расстояния объектива. С целью исключения дополнительной процедуры калибровки при каждом замере, было определено оптимальное фокусное расстояние, на котором производилась регистрация

движения пальцев. При подборе оптимального фокусного расстояния учитывались следующие критерии: фокусное расстояние должно было легко воспроизводиться в объективе камеры; площадь меток в кадре была наибольшей, что позволило увеличить точность измерения; при измерении, метки не должны были выходить за границу кадра; фокус настраивался так, чтобы все метки в кадре были четкими, т.к. размытые изображения порождали большие (от 0,5 секунд) временные разрывы в измерениях.

Выбор оптимального фокусного расстояния и угла обзора, а также линейных размеров маркера (в нашем случае 10х10 мм) позволили исключить перекрытие меток. Перекрытие возникало, когда более дальние от объектива метки находились за более близко расположенными или перекрывались физически при использовании меток с линейными размерами 15х15 мм.

В серии экспериментов видеорегистрация движения пальцев производилась на фокусном расстоянии 18 и 50 мм. Вследствие особенностей конструкции используемого объектива только эти фокусные расстояния можно было воспроизвести в точности, т.к. в этом случае использовались крайние положения объектива при вращении. При фокусном расстоянии 18 мм наблюдалось перекрытие меток и размытие изображения удалённых меток, что представлено на рисунке 1. По результатам экспериментов на фокусном расстоянии 50 мм были достигнуты лучшие показатели по чёткости меток и, соответственно, по качеству записи временных рядов. Отчасти, полученные результаты связаны с тем, что в объективах переменного фокусного расстояния диафрагма закрыта сильнее при большем фокусном расстоянии, что способствует меньшему размытию изображения.

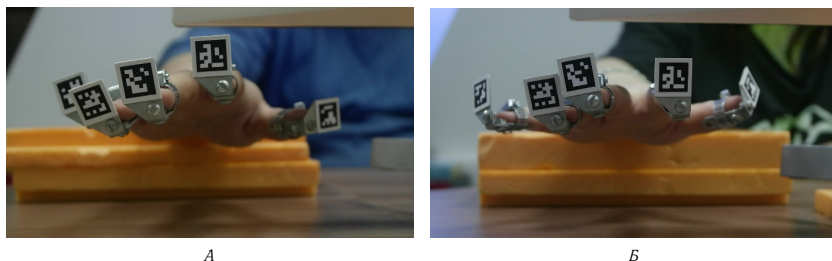


Рис. 1. Характерные причины ошибок распознавания образов (меток): А). Перекрытие меток при фокусном расстоянии 18 мм. Б). Размытие меток на I и V фалангах при открытой диафрагме

Выбор меток производился из библиотеки ArUco, включающей несколько наборов. Метка является уникальным идентификатором, которому сопоставлен порядковый номер в данном наборе. Так при распознавании меток на фотографии получали массив пар вида: идентификатор метки – координаты углов метки. Так как для данной задачи не требовалось использовать одну и ту же метку в кадре более одного раза, можно считать, что для каждой распознанной метки имеем один набор координат её углов.

Наборы варьируются по количеству битов в каждой метке и по количеству меток в наборе (рис. 2). Нами был выбран набор DICT_4X4_50 из 50 меток с 4 битами по ширине и 4 битами по высоте. Данный набор является наименьшим по количеству меток, также метки в нем состоят из самого малого количества бит по высоте и ширине. Такое

решение обусловлено тем, что при одном и том же размере, нанесенной на некотором носителе метки, размер бита метки будет больше, соответственно, он займет больше пикселей в матрице камеры, что способствует более точному распознаванию. Также, чем меньше меток в наборе, тем больше минимальное расстояние между метками, то есть при распознавании вероятность ошибочной идентификации ниже.



Рис. 2. Метки с битностью 4, 5, 6, 7 соответственно

Для калибровки камеры производилась серия снимков специальной картинке – CharucoBoard, представляющей собой шахматную доску, где в белых клетках расположены метки из выбранного набора (рис. 3). Количество элементов по горизонтали и вертикали может быть сконфигурировано, ограничением в данном случае является количество меток в наборе. Также имеется возможность задать соотношение между размером клетки и размером метки.

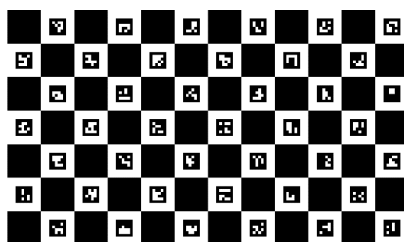


Рис. 3. CharucoBoard

Стандартный способ калибровки камеры выглядит следующим образом: изображение печатается на листе бумаги, либо картона. С помощью фоторедактора, в нашем случае GIMP, специальная картинка печаталась с некоторым значением dpi, чтобы добиться заданного физического размера метки. Например, размер метки на цифровой фотографии 100 пикселей, наша задача напечатать CharucoBoard, где размер метки будет равен 10 мм, тогда:

$$dpi = 100px * 10mm / 25,4mm$$

Физически размер метки необходим для правильной калибровки камеры. Для калибровки камеры использовались координаты углов внутренних клеток шахматной доски и меток библиотеки ArUco, распознанных на фотографии [3]. Далее они сопоставлялись с точками на исходной картинке, для выявления искажений объектива и построения калибровочной матрицы. В случае с бумажным носителем, сложно избежать искажений из-за неровности листа бумаги и деформации листа после печати. По этой причине авторами был предложен другой способ получения калибровочных фотографий, где изображение выводилось на дисплее монитора. Такой способ позволил

избежать искажений, сделать калибровочные фотографии четкими, измерить физический размер метки в ChaGucoBoard с точностью технологического процесса матрицы дисплея.

Для этого необходимо: сгенерировать ChaGucoBoard с разрешением равным разрешению используемого монитора; получить dpi монитора из его технических характеристик; с помощью приложения GIMP измерить размер метки в пикселях. Размер метки в миллиметрах рассчитывался по формуле (*markerSize*):

$$markerSize = markerSizePx * \frac{mm\ in\ inch}{dpi}$$

После определения линейных размеров метки производились калибровочные фотографии. Для качественной калибровки ChaGucoBoard фотографировался в различных плоскостях: поворот монитора вокруг собственной оси в горизонтальной плоскости; поворот монитора во фронтальной плоскости; перемещения монитора вдоль оси X, образованной системой координат с центром в фокусе объектива; равномерное удаление монитора, перемещение вдоль оси Z; комбинированные по двум осям вращения монитора.

На рисунке 4 представлены некоторые калибровочные фотографии из всей выборки ($n = 298$). Фотографирование производилось с задержкой снятия затвора 3 секунды с использованием штатива. Задержка необходима для стабилизации камеры после механического воздействия на кнопку снятия затвора. Таким образом, была увеличена выдержка камеры, и тем самым повышена яркость фотографии без шумового эффекта. Использование штатива позволило избежать появления размытия фотографий.



Рис. 4. Примеры калибровочных фотографий

В эксперименте перед регистрацией обследуемый принимал стандартное положение тела: сидя, с опорой на спинку стула, с вытянутой вперед верхней конечностью, которая располагалась на поверхности опоры под прямым углом к телу. По команде испытуемый производил сгибание пальцев. При регистрации тремора опора не использовалась, и верхняя конечность произвольно фиксировалась испытуемым в плечевом суставе при неизменной величине угла с телом. Фронтальной камерой регистрировались колебания

всей вытянутой вперед верхней конечности без учета вклада каждого биомеханического звена в отдельности.

Штатив с камерой был расположен прямо напротив кисти испытуемого. Изображение в кадре разделялось на две половины по вертикали (для удобства разделения использовалась сетка 4x4). В случае измерения тремора правой руки, в правой половине кадра располагались I и II, в левой половине, соответственно, III-V пальцы (рис. 5).

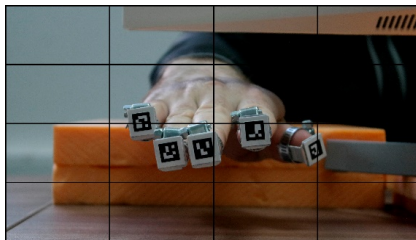


Рис. 5. Пример расположения кисти испытуемого в кадре при видеорегистрации движений пальцев

При регистрации движений пальцев обследуемого, были получены треки, которые в качестве иллюстрации представлены на рисунках 6 и 7.

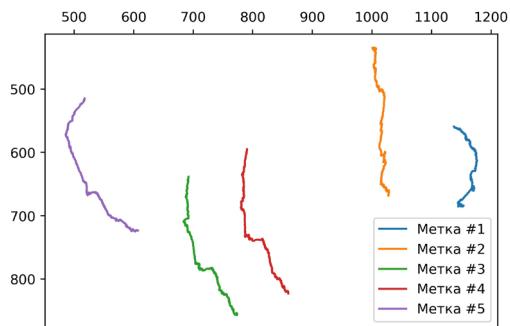


Рис. 6. Взаимное расположение треков дистальных фаланг правой верхней конечности при сгибании пальцев

Пример регистрации тремора правой верхней конечности приведён на рисунке 8.

Идентификация паттернов движений пальцев имеет практическое применение, как для диагностических исследований координационных навыков человека-оператора, так и для оптимизации человеко-машинного взаимодействия и управления техногенными системами. Регистрация тремора и последующий анализ полученных данных могут быть использованы для экспресс-диагностики психоэмоционального состояния

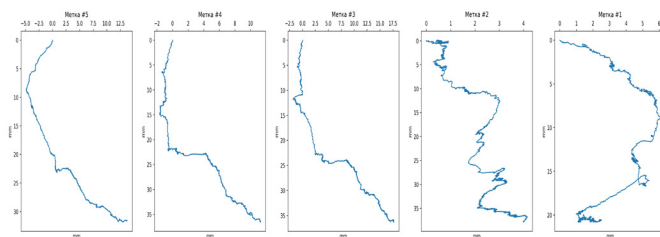


Рис. 7. Треки дистальных фаланг правой верхней конечности при сгибании пальцев на осях координат

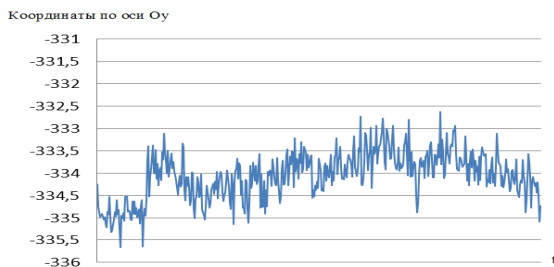


Рис. 8. Кинематограмма правой верхней конечности, полученная при видеорегистрации

человека-оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Видеоанализ движений человека в клинической практике (обзор) / В. В. Борзиков, Н. Н. Рукина, О. В. Воробьева, А. Н. Кузнецов, А. Н. Белова // Современные технологии в медицине. 2015. Т.7, № 4. С. 201-210.
2. Иванова-Смоленская И. А., Карабанов А. В., Червяков А. В., Иллариошкин С. Н. Современные инструментальные методы регистрации тремора // Новые технологии. 2011. № 2. С. 17-23.
3. Ильясов И. С. Вычисление расстояния до наблюдаемого объекта по изображениям со стереопары // Молодой учёный. 2016. № 14. С. 146-151. URL <https://moluch.ru/archive/118/32662/>
4. Математическая модель качественного выделения целенаправленных и нецеленаправленных движений по данным видеоряда спектрального анализа сложного двигательного акта во фронтальной плоскости / С. А. Лихачев, В. А. Лукашевич, А. В. Хроменков, А. В. Тузиков // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. 2011. № 5 (59). С. 55-60.
5. Мишанов А Ю., Кручинин П. А. Меры оцениваемости в задаче восстановления показаний системы видеоанализа движений человека по измерениям нормальной

- реакции опоры // Российский журнал биомеханики. 2008. Т. 12, № 3 (41). С.58-73.
6. О двух модификациях метода наименьших квадратов в задаче восстановления утраченной информации системы видеонализа по показаниям акселерометра / А. Н. Бобылев, Ю. В. Болотин, А. В. Воронов, П. А. Кручинин // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 1 (55). С. 89-101.
 7. Розумняк Н. Н. Видеотрекинг спортсменов. Помехи и их особенности // Технические науки : традиции и инновации : материалы Междунар. науч. конф. Челябинск : Два комсомольца, 2012. С. 45-48. URL <https://moluch.ru/conf/tech/archive/6/1584/>
 8. Фролов С. В., Горбунов А. В., Потлов А. Ю. Регистрация и анализ тремора с помощью детектора движения на основе веб-камеры // Биомедицина. 2012. № 2. С. 80-83.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ

Бычин И. В.^{1,2}, Ряховский А. В.²

¹ Обособленное подразделение ФГУ ФНЦ ИИИСИ РАН в гор. Сургуте, e-mail: igor-bychin@yandex.ru

² Сургутский государственный университет, e-mail: echo47@rambler.ru

Сложные природные системы, включающие в себя объекты естественного происхождения, биологической природы, а также человеческой деятельности, характеризуются наличием иерархии моделей взаимодействия элементов, образующих локальные и нелокальные связи. Для решения этих задач в рамках единого подхода требуется сопряжение разномасштабных математических моделей на основе системного анализа, сочетающего в себе новые знания в области кинетического и гидродинамического описания крупномасштабных объектов отрасли и их адекватного компьютерного отображения на отечественной базе программного и аппаратного обеспечения. Решение этих актуальных задач основано на компьютерном моделировании развития иерархии явлений от микроуровня до макроуровня, позволяющих предугадать сценарий эволюции сложных объектов, выбрать оптимальное предсказательное планирование и управление его динамикой в условиях значительных пространственно-временных масштабов, сложной геометрии, существенной статистической неустойчивости и неполноты исходных данных.

Данная работа посвящена разработке вычислительной программы для численного решения задач естественной конвекции во вращающихся сферических слоях. Математическая модель гидродинамики и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, реализованная в разработанном программном комплексе, состоит из уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнения переноса тепла в сферических координатах. Для построения дискретного аналога системы уравнений естественной конвекции был использован метод контрольного объема с применением полностью неявной схемы для аппроксимации по времени и схемы со степенным законом для аппроксимации конвективно-диффузионных потоков на гранях контрольных объемов [1]. Для расчета поля скорости была введена шахматная (разнесенная) сетка, т.е. компоненты скорости определялись на гранях основных контрольных объемов. Численное решение задачи получается при помощи алгоритма PISO (Pressure-Implicit

with Splitting of Operators) [2-3], а для решения полученных в результате дискретизации систем линейных уравнений применялся модифицированный метод переменных направлений с использованием циклической прогонки по азимутальному направлению.

Предполагается, что обе границы сферического слоя могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. Такая постановка требует совместного решения уравнений движения вязкой жидкости и уравнений движения твердых границ сферического слоя. Кроме того, считается, что вся механическая система, которая состоит из двух твердых сферических слоев (внутренний слой - твердый шар) и слоя жидкости между ними, замкнута.

Для расчета граничных условий используется алгоритм совместного численного решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое и уравнений движения твердых границ сферического слоя под действием сил вязкого трения со стороны жидкости, основанный на законе сохранения момента импульса.

Численное моделирование крупномасштабных конвективных и магнитогидродинамических течений требует значительных вычислительных ресурсов, поэтому целесообразной является разработка программного обеспечения, предназначенного для выполнения на гибридных вычислительных системах с графическими процессорами. В данной работе для создания программы, задействующей графические ускорители, был использован стандарт OpenCL. В OpenCL-версии программного кода можно выделить три логических части: последовательная часть, управляющая программа и вычислительные ядра. Последовательная часть кода, которая отвечает за построение сетки и задание начальных и граничных условий, выполняется на CPU. Управляющая часть программы разработана с использованием OpenCL API и организует взаимодействие хост-системы (одного ядра CPU) с OpenCL-устройством (GPU). Вычислительные ядра являются массивно-параллельными частями исходного кода, исполняемыми на графическом процессоре. Процедуры исходного кода CPU-версии программ, допускающие хотя бы минимальный прирост производительности при выполнении на GPU, были портированы в «OpenCL-ядра». В вычислительных ядрах реализованы: процедуры расчета коэффициентов дискретных аналогов дифференциальных уравнений составляющих математическую модель, процедуры реализующие алгоритм PISO и процедуры решения СЛАУ.

Разработанный программный комплекс был протестирован на ряде задач, имеющих известное аналитическое решение, и, кроме того, было проведено сравнение с численными решениями задачи о естественной конвекции в центральном поле тяжести во вращающемся сферическом слое, полученными другими группами исследователей [4]. Результаты тестовых расчетов демонстрируют корректность получаемого численного решения и применимость программного обеспечения для численного исследования естественной конвекции в сферических слоях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ханты-Мансийского автономного округа - Югры в рамках научного проекта № 18-47-860004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости // М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Issa R.I. Solution on the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics, 61, 1985, P. 40-65.

3. Issa R.I., Gosman A.D. and Watkins A.P. The Computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme // Journal of Computational Physics, 62, 1986, P. 66-82.
4. Christensen, U.R., et al. A numerical dynamo benchmark // Physics of the Earth and Planetary Interiors, 128, 2001, 25–34.

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КОРНЕЙ ПОЛИНОМА

Заикин П. В., Лысенкова С. А., Еловой С. Г.

г. Сургут

Рассматривается комбинированный алгоритм поиска корней полинома. Алгоритм используется для нахождения целых и рациональных значений корня и численно подбираются остальные. Предложены реализации алгоритмов Лобачевского и Дженкинса-Трауба на языке программирования Python.

Ключевые слова: алгоритм Лобачевского, алгоритмов Дженкинса-Трауба, полином.

COMBINED ALGORITHM FOR SEARCH OF ROOTS OF POLYNOM

Zaikin P. V., Lysenkova S. A., Elovoy S. G.

Surgut

In the paper discovered a problem with finding roots in polynomial equations, using a combined algorithm for finding the roots of a polynomial is considered. The algorithm is used to find the integer and rational values of the root and the others are selected numerically. The proposed implementation of the Lobachevsky and Jenkins-Traub algorithms in the Python programming language.

Keywords: Lobachevsky algorithm, Jenkins-Traub algorithms, polynomial.

В различных областях математического моделирования исследователь сталкивается с необходимостью найти корни полинома, вида:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

При этом, т. к. задача считается довольно простой и изученной, использование готовых библиотек и модулей не вызывает каких-либо вопросов. В тоже время, в ряде крайних случаев, возможно получение совершенного не того результата.

Для примера рассмотрим простой полином:

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0. \quad (2)$$

Легко убедиться, что корнями этого полинома будут числа 3 и -1 кратный корень. Воспользуемся популярным модулем для математических расчетов языка программирования Python.

```
>>> import numpy as np
>>> l = [-1,1,5,3]
>>> numpy.roots(l)
```

Результатом вычисления будет следующий массив данных, числовые значения в котором есть корни полинома:

```
array([ 3.+0.00000000e+00j, -1.+1.20320638e-08j, -1.-1.20320638e-08j]).
```

Природа расхождения ответов связана с особенностями численного нахождения корней полинома, в данном случае модуль [1] использует расчет собственных чисел соответствующей матрицы [2]. Комплексные числа возникают из-за ошибок округления. Но, когда значения могут быть получены точно, мы уверены, что стоит применять другой алгоритм.

Сначала вычислить все возможные целочисленные корни полинома, далее все существующие вещественные корни и останется численно вычислить только комплексные корни.

Описание алгоритма:

1. Если все коэффициенты целые, то поиск целых корней, предварительно старший коэффициент сделать единичным.

2. Деление полинома на полиномы степени 1 для найденных целых корней.

3. Поиск вещественных корней методом Лобачевского-Грефе.

4. Деление полинома на полиномы степени 1 для найденных корней.

5. Поиск корней методом Дженкинса-Трауба.

Распишем каждый из представленных шагов алгоритма.

1 и 2 шаг.

Согласно теореме о рациональных корнях полинома, если все коэффициенты полинома целые и старший равен 1, многочлен вида

$$P(n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

имеет целочисленные корни среди делителей свободного коэффициента. Найдя делители x_i свободного коэффициента a_0 - можем проверить наличие целых корней у полинома. Произведя деление на линейные полиномы вида $(x - x_i)$ исходного многочлена, мы уменьшаем его мерность, чем сокращаем время затрачиваемое на нахождение остальных корней.

3 и 4 шаг.

Остаточный полином, уже не содержащий целочисленные корни, исследуем алгоритмом Лобачевского-Грефе. Данный алгоритм позволяет найти большие корни у полинома $q(x)$ – корнями которого являются квадраты корней исходного полинома [4]. В результате нескольких итераций находим все возможные вещественные корни.

5 шаг.

Для нахождения комплексных корней используем алгоритм Дженкинса-Трауба [3]. Алгоритм начинается с проверки полинома на существование очень больших или очень малых корней. При необходимости коэффициенты масштабируются с помощью перенормировки переменных. В алгоритме корни находятся один за другим и, как правило, в порядке увеличения значения.

После того, как каждый корень найден, производится деление на соответствующий одночлен вида $(x - x_i)$. С остатком от деления процедура повторяется до полного нахождения корней. [5]

Разработанная реализация комбинированного алгоритма хорошо распараллеливается, что позволяет использовать все доступные вычислительные ядра при выполнении расчета.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-47-860004

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.roots.html>

2. R. A. Horn & C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999, pp. 146-7
3. M. A. Jenkins and J. F. Traub. Algorithm 419: zeros of a complex polynomial [c2]. Comm. of the ACM, 15(2):97–99, 1972.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. - Методы вычислений, Том 2 М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.
5. Ralston, A. and Rabinowitz, P. (1978), A First Course in Numerical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ГИДРОКРЕКИНГА ПАРАФИНОВ

Лысенкова С. А., Еловой С. Г.
г. Сургут

Математическая модель гидрокрекинга парафинов представляет собой систему дифференциальных уравнений, записанных относительно скорости изменения концентрации индивидуальных компонентов. Получено численное решение кинетики реакции процесса гидрокрекинга парафина ундекан. Получен вектор дающий значения констант скорости реакций, для которых целевая функция оптимизации октанового числа ундекана достигает максимального значения.

Ключевые слова: гидрокрекинг, нефть, кинетика, дифференциальная эволюция.

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION OF THE PROCESS OF HYDROCRACKING OF PARAFFINS

Lysenkova S. A., Elovoy S. G.
Surgut

The mathematical model of paraffin hydrocracking is a system of differential equations written with respect to the rate of change in the concentration of individual components. A numerical solution of the reaction kinetics of the hydrocracking process of paraffin undecane is obtained. The vector giving values of reaction rate constants for which the target function of optimization of the octane number of undecane reaches the maximum value is obtained.

Keywords: hydrocracking, oil, kinetics, differential evolution.

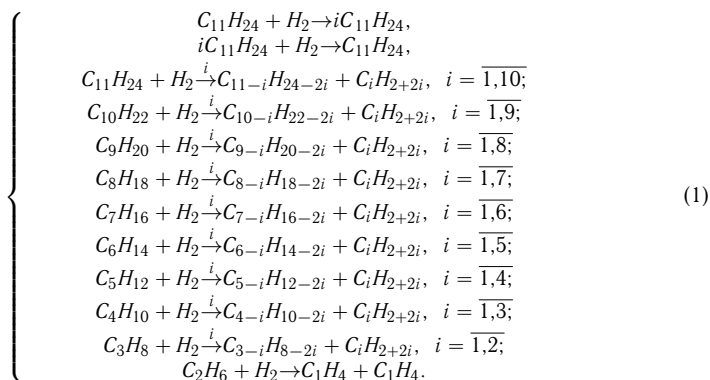
Гидрокрекинг – процесс превращения нефти в бензин и реактивное топливо под воздействием постоянного высокого давления и температуры, а также при наличии катализатора (на основе вольфрама, платины или никеля). Первый промышленный процесс гидрокрекинга, был разработан в 1927 году немецкой компанией I. G. FarbenIndustrie, и предназначался для переработки бурого угля в бензин [1].

Нефть – природная физическая жидкость, состоящая из разных химических соединений. Более чем на 70% нефть состоит из углеводородов, из них 40% линейного или разветвленного строения, содержащие только простые связи (парафины).

Исходная смесь, с которой проводится численный эксперимент, будет состоять из одного углеводорода $C_{11}H_{24}$ (Ундекан). Это тяжёлый углеводород и под действием температуры и соударений распадается на углеводороды $C_{10}H_{22}$ (Декан), C_9H_{20} (Нонан), C_8H_{18} (Октан), C_7H_{16} (Гептан), C_6H_{14} (Гексан), C_5H_{12} (Пентан),

C_4H_{10} (Бутан), C_3H_8 (Пропан), C_2H_6 (Этан), C_1H_4 (Метан), также превращается в изомер $iC_{11}H_{24}$ с тем же количеством атомов углерода. Вещество $iC_{11}H_{24}$ также распадается на $C_{10}H_{22}$ (Декан), C_9H_{20} (Нонан), C_8H_{18} (Октан), C_7H_{16} (Гептан), C_6H_{14} (Гексан), C_5H_{12} (Пентан), C_4H_{10} (Бутан), C_3H_8 (Пропан), C_2H_6 (Этан), C_1H_4 (Метан), либо обратное превращается в $C_{11}H_{24}$ (Ундекан). Продукты реакции распадаются на более легкие углеводороды, кроме углеводорода C_1H_4 (Метан) с ним никаких превращений не происходит.

Схема химических превращений при гидрокрекинге будет иметь вид:



Кинетика реакции, описанная схемой химических превращений (1), представляет систему дифференциальных уравнений, записанных относительно скорости изменения концентрации индивидуальных компонентов.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений выбран явный многошаговый метод Адамса-Башфорта. Данный метод k -го порядка требует предварительного вычисления в k начальных точках. Для вычисления начальных значений используется одношаговый численный метод Рунге-Кутты.

На рисунке 1 представлен график, отражающий результаты расчета с использованием математической модели схемы химических превращений углеводорода $C_{11}H_{24}$ (Ундекан) процесса гидрокрекинга. На графике можно наблюдать, что парафин $C_{11}H_{24}$ (Ундекан) в течении времени расходуется, и образуются другие более легкие углеводороды.

С помощью разработанного программного кода получено численное решение кинетики реакции процесса гидрокрекинга парафина $C_{11}H_{24}$ (Ундекан). Автоматизированный расчет позволил получить визуальное представление о ходе процесса.

Одним из наиболее важных показателей качества бензина, определяющих его марку, является октановое число. В лабораторных условиях октановое число бензина определяется, например, по исследовательскому методу, который основан на проведении сравнительных испытаний бензина и эталонного топлива, в соответствии с ГОСТами [2].

Чаще всего в литературе встречается то, что в качестве эталонного топлива применяется смесь, состоящая из гептана (C_7H_{16}) и изооктана (iC_8H_{18}).

В дальнейшем будем рассматривается процедура с помощью метода дифференциальной эволюции (был придуман Рэйнером Сторном и Кеннетом Прайсом в 1995 году впервые опубликован ими [3]).

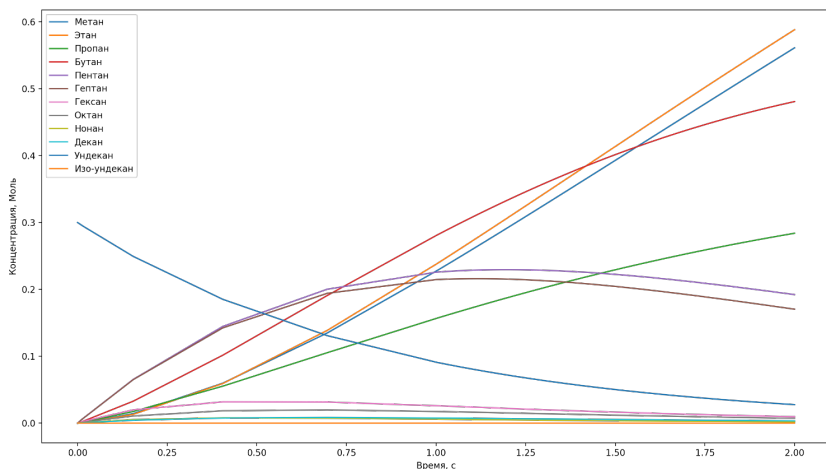


Рис. 1. Модельное изменение концентрации веществ в процессе реакции гидрокрекинга $C_{11}H_{24}$ (Ундекан)

Метод дифференциальной эволюции – прямой метод оптимизации, в ходе его работы требуется только вычисление значения целевой функции (критерия оптимизации), не её производных.

Постановка задачи:

Задана целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2)$, определенная на множестве допустимых решений $M \subseteq R^n$. Требуется найти глобальный условный максимум функции $f(x)$ на множестве, т. е. найти точку

$$x^* \in \text{Argmax} f(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2)^T$, $M = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, n\}$.

Содержательная часть метода:

Случайным образом генерируется набор $I_0 = \langle x^k, k = 1, N \rangle \subset M$ векторов.

На каждой эпохе эволюционного процесса алгоритм генерирует новое поколение векторов, случайным образом комбинируя между собой векторы предыдущего поколения. Процесс заканчивается, когда количество сгенерированных поколений векторов оказывается равным заданному максимальному числу поколений.

Для каждого вектора $\vec{x}_i$ из старого поколения (базового вектора) выбираются три различных случайных вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, так же среди векторов старого поколения, за исключением самого вектора $\vec{x}_i$, и генерируется мутантный вектор по соотношению:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \varphi(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) \quad (3)$$

где φ – один из параметров настройки метода, характеризующий максимально возможное расстояние, на которое может расширяться область поиска оптимума по одной переменной за одну эпоху эволюции ($\varphi \leq 2.0$).

Над мутантным вектором выполняется операция кроссовера (скрещивания). В ходе неё некоторые координаты мутантного вектора замещаются соответствующими координатами из базового вектора. Каждая координата замещается с некоторой вероятностью

(ρ), которая также является параметром настройки метода дифференциальной эволюции.

Полученный после скрещивания вектор называется пробным вектором. Если он оказывается лучше базового вектора (значение целевой функции увеличилось), то в новом поколении базовый вектор заменяется на пробный, в противном случае базовый вектор сохраняется в новом поколении.

На каждой эпохе эволюционного процесса определяется лучший вектор поколения с целью контроля скорости поиска оптимального решения. Условиями окончания моделирования могут быть следующие:

- истерпано заданное предельное количество эпох эволюции;
- истерпано заданное предельное физическое расчётное время;
- значение критерия оптимизации лучшего вектора поколения не изменяется на протяжении заданного предельного количества эпох эволюции;
- достигнуто удовлетворительное значение критерия оптимизации.

Разработан программный код, позволяющий проводить данную последовательность действий, и для вещества $C_{11}H_{24}$ (Ундекан) получить вектор дающий значения констант скорости реакций, для которых целевая функция оптимизации достигает максимального значения.

Работа выполнена при поддержке Программы ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 г., проект № 0065-2019-0019

ЛИТЕРАТУРА

1. Энциклопедия техники // Гидрокрекинг и гидроочистка/ Интернет-ресурс: <http://enciklopediya-tehniki.ru/tehnologiya-dobychi-gaza-i-nefti/gidrokreking-i-gidroochistka.html>
2. Е. А. Могутова, С. П. Жаров Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Курган, 2014.
3. Storn R., Price K. Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, Journal of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1997, Vol. 11, 341 - 359.
4. Feoktistov V. Differential Evolution In Search of Solutions, Springer, 2006.
5. Микшина, В.С. Математическое моделирование процесса гидрокрекинга бензиновых фракций /к.т.н.: 05.17.08:/ Томск, 1983, 188 с.
6. Заикин П.В., Микшина В.С., Лысенкова С.А. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник кибернетики, №2, 2018, С.122-128.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ШАРЕ

Гореликов А. В.

г. Сургут

Рассматривается начально-краевая задача с вакуумными граничными условиями о диффузии магнитного поля в проводящем шаре. Получено формальное решение для случая аксиально-симметричных магнитных полей, у которых азимутальная компонента тождественно равна нулю. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант: 16-29-15105 офн_м.

Ключевые слова: диффузия магнитного поля, вакуумные граничные условия.

ON ONE EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF DIFFUSION OF A MAGNETIC FIELD IN A CONDUCTING BALL

Gorelikov A. V.

Surgut

The initial-boundary problem of the diffusion of a magnetic field in a conducting sphere with vacuum boundary conditions was investigated. A formal solution is obtained for the case of axially symmetric magnetic fields, in which the azimuthal component is identically zero. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant: 16-29-15105 ofi_m.

Keywords: magnetic field diffusion, demagnetization, vacuum boundary conditions.

В приближении квазистационарного магнитного поля [1–3] рассматривается задача о размагничивании находящегося в вакууме однородного и изотропного проводящего шара D с радиусом a . Магнитная проницаемость считается равной единице. Предполагается, что в вакууме (т.е. в области $R^3 \setminus \bar{D}$) магнитное поле потенциально и потенциал магнитного поля является регулярной на бесконечности гармонической функцией. На границе шара D все компоненты магнитного поля полагаются непрерывными, т.е. рассматривается задача с так называемыми вакуумными граничными условиями [4, 5].

Задача решается в безразмерном виде. Основные безразмерные переменные: t – время; r, θ, φ – сферические координаты, начало системы координат совпадает с центром шара $D = \{(r, \theta, \varphi) \mid r < 1\}$; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ – ортонормированный базис в сферических координатах; $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля. Для обезразмеривания используются следующие величины: характерная длина – a (радиус шара); характерное время $t^* = a^2/\nu_m$, где ν_m – магнитная вязкость (коэффициент магнитной диффузии); характерное абсолютное значение индукции магнитного поля – B^* .

Внутри шара D магнитное поле удовлетворяет уравнениям диффузии и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \Delta \mathbf{B}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Вне шара D магнитное поле одновременно потенциально и соленоидально:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

В начальный момент времени $\mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r})$. Предполагается, что начальное магнитное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ соленоидально и непрерывно в R^3 , потенциально в $R^3 \setminus \bar{D}$, и стремится к нулю на бесконечности. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая аксиально-симметричных магнитных полей, у которых азимутальная компонента тождественно равна нулю

$$\mathbf{B} = B_r(r, \theta, t) \mathbf{e}_r + B_\theta(r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

Если искать решение в виде:

$$r < 1 : \mathbf{B}(r, \theta, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(r, \theta, t), \quad (4)$$

$$r > 1 : \mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla u(r, \theta, t), \quad (5)$$

то рассматриваемую начально-краевую задачу можно сформулировать в терминах векторного $\mathbf{A}(r, \theta, t)$ и скалярного $u(r, \theta, t)$ потенциалов:

$$r < 1 : \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \Delta \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$r > 1 : \Delta u = 0, \quad (u - \text{равномерно стремится к нулю при } r \rightarrow \infty) \quad (7)$$

$$\text{rot} \mathbf{A}|_{r=1} = \nabla u|_{r=1} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}|_{t=0} = \mathbf{A}_0(r, \theta), \quad u|_{t=0} = u_0(r, \theta), \quad (9)$$

Частные решения задачи (6) - (8), описывающие процесс затухания аксиально-симметричного магнитного поля, можно искать в виде:

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = e^{-\lambda t} A(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi, \quad (10)$$

$$u(r, \theta, t) = e^{-\lambda t} w(r, \theta), \quad (11)$$

где $\lambda > 0$ (см. [1]). Подставляя выражения (10) и (11) в систему (6) - (8), получаем, что функции $A(r, \theta)$ и $w(r, \theta)$ являются решением следующей вспомогательной задачи:

$$r < 1 : \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \left[\lambda - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] A = 0, \quad (12)$$

$$r > 1 : \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (13)$$

(w - равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$)

$$\left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A)}{\partial \theta} \right] \Big|_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (14)$$

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right] \Big|_{r=1} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{r=1}. \quad (15)$$

Множество решений вспомогательной задачи (12) - (15) находится методом разделения переменных и имеет вид:

$$r < 1 : A_{nm}(r, \theta) = a_{nm} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta), \quad (16)$$

$$r > 1 : w_{nm}(r, \theta) = -n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (17)$$

где $P_n(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра, $P_n^{(1)}(\cos \theta)$ - присоединенные функции Лежандра 1-ого порядка, $J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)$ - функции Бесселя первого рода, полужелого порядка, $\mu_m^{(n)}$ - положительные корни уравнения $J_{n-1/2}(\mu) = 0$, a_{nm} - произвольные постоянные, $n = 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$ [6, 7].

В общем случае система базисных полоидальных и тороидальных полей для геомагнитного поля получена в работе [8].

Решение начально-краевой задачи для потенциалов (6) - (9) имеет можно искать в виде:

$$r < 1 : \mathbf{A}(r, \theta, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta) \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (18)$$

$$r > 1 : u(r, \theta, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (19)$$

Если в начальный момент времени известно значение азимутальной компоненты векторного потенциала

$$A_{\varphi}(r, \theta, t)|_{t=0} = A_0(r, \theta), \quad (20)$$

то коэффициенты a_{nm} в (18) и (19), находятся по формуле

$$a_{nm} = \frac{1}{N^2} \int_0^{\pi} \int_0^1 A_0(r, \theta) \frac{J_{n+1/2}(\mu_n^{(m)} r)}{\sqrt{r}} P_n^{(1)}(\cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta, \quad (21)$$

$$N^2 = \|J_{n+1/2}\|^2 \|P_n^{(1)}\|^2 = \frac{n(n+1)}{2n+1} J_{n+1/2}^2(\mu_n^{(m)}).$$

Если ряды (18), (19) можно почленно дифференцировать, то аксиально-симметричное решение исходной начально-краевой задачи (1), (2) о размагничивании проводящего шара записывается следующим образом:

$$r < 1 : \mathbf{B}(r, \theta, t) = \text{rot} \mathbf{A}(r, \theta, t) = \text{rot} (A_{\varphi}(r, \theta, t) \mathbf{e}_{\varphi}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_{\varphi})}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\varphi})}{\partial r} \mathbf{e}_{\theta},$$

$$B_r(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B_{\theta}(r, \theta, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r) \right) P_n^{(1)}(\cos \theta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \left(n \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} - \mu_m^{(n)} \frac{J_{n-1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} \right) P_n^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

$$r > 1 : \mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla u(r, \theta, t) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_{\theta},$$

$$B_r(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+2}}, \quad (24)$$

$$B_{\theta}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_{nm} J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{r^{n+2}}. \quad (25)$$

Заметим, что функции:

$$\frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}}, \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}}, \frac{J_{n-1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}},$$

ограничены при $r = 0$ для $n = 1, 2, \dots$ [9].

Коэффициенты a_{nm} в (22) – (25) могут быть найдены, из начальных условий для магнитного поля $\mathbf{B}$. Пусть в начальный момент времени радиальная компонента индукции магнитного поля

$$B_r(r, \theta, t)|_{t=0} = f(r, \theta), \quad (26)$$

полагая в (22) $t = 0$, приходим к равенству

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n(n+1) a_{nm} \frac{J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r)}{r^{3/2}} P_n(\cos \theta). \quad (27)$$

Для нахождения коэффициентов a_{nm} умножим левую и правую части (27) на $\left(\sqrt{r} J_{k+1/2}(\mu_l^{(k)} r) P_k(\cos \theta) \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ и проинтегрируем по шару D . В результате получаем

$$a_{nm} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^\pi \int_0^1 f(r, \theta) J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)} r) P_n(\cos \theta) r^{\frac{5}{2}} \sin \theta dr d\theta,$$

$$N_1^2 = n(n+1) \|J_{n+1/2}\|^2 \|P_n\|^2 = \frac{n(n+1)}{2n+1} J_{n+1/2}^2(\mu_n^{(m)}).$$

Приведем пример задачи о размагничивании шара с вакуумными граничными условиями, которая имеет простое решение в элементарных функциях. Данный пример можно использовать для тестирования программного обеспечения моделирования гео-динамо. Если задать начальное магнитное поле $\mathbf{B}^{(0)}(r, \theta) = B_r^{(0)} \mathbf{e}_r + B_\theta^{(0)} \mathbf{e}_\theta$ в виде:

$$r \leq 1 :$$

$$B_r^{(0)} = \frac{\cos \theta}{(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r \right), B_\theta^{(0)} = \frac{\sin \theta}{2(\pi r)^2} \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} - \cos \pi r - \pi r \sin \pi r \right), \quad (28)$$

$$r > 1 :$$

$$B_r^{(0)} = \frac{\cos \theta}{\pi^2 r^3}, B_\theta^{(0)} = \frac{\sin \theta}{2 \pi^2 r^3}, \quad (29)$$

то поле $\mathbf{B}(r, \theta, t) = e^{-\pi^2 t} \mathbf{B}^{(0)}(r, \theta)$ является решением задачи (1-2) с начальными условиями (28, 29).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика : учебное пособие - 3-е изд. - Москва : Логос, 2011. - 324 с.
3. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика / Пер. с англ. В. Г. Петрова. М.: Атомиздат, 1978 - 144 с.
4. KONO M., ROBERTS P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Reviews of Geophysics. 2002. Vol. 40. 10. P. B1-B41.
5. Roberts, P.H. & Glatzmaier, G.A. Geodynamo theory and simulations // Rev. Mod. Phys. , 2000. 72, 1081-1124.
6. Уравнения математической физики : Учебник для ун-тов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский . 4-е изд. испр. М. : Наука, 1972. — 746с.
7. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике : Учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 1993. — 352с.
8. Г. М. Водинчар, Л. К. Крутьева Базисные системы для геомагнитного поля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2010, № 1(1), 24-30.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, И. М. : Наука, 1979. — 832с.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ МАНУАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА

Бурыкин Ю. Г., Брагинский М. Я.

г. Сургут

В данной работе предлагается построение модели мануальных движений человека, выполняемых как произвольно, так и непроизвольно, а также в условиях статической нагрузки. Исходные экспериментальные данные представлены в виде массивов данных, соответствующих изменению координаты положения пальца испытуемого во времени с шагом 0,02 с. и длительностью 5 с. Для решения поставленной задачи предлагается использовать в качестве математического аппарата искусственные нейронные сети.

Ключевые слова: нейронная сеть, произвольные движения, непроизвольные движения, статическая нагрузка, кинематограмма.

IDENTIFICATION OF NEURAL NETWORK PARAMETERS WHEN BUILDING A MANUAL MOVEMENT MODEL

Burykin Yu. G., Braginskii M. Ya.

Surgut

This paper proposes the construction of a model of manual movements of a person, performed both arbitrarily and involuntarily, as well as under static load conditions. The initial experimental data are presented in the form of data arrays corresponding to the change in the coordinate position of the subject's finger in time in 0.02 s increments. and a duration of 5 s. To solve the problem, it is proposed to use artificial neural networks as a mathematical apparatus.

Keywords: neural network, voluntary movements, involuntary movements, static load, cinematogram.

Психофизиологическое состояние человека отражается на его движениях, выполняемых как произвольно, так и непроизвольно [5]. Представляется актуальной задачей идентификация психомоторных паттернов человека-оператора, возникающих при утомлении с целью профилактики аварийных ситуаций в производственной сфере. Кроме того, идентификация двигательных паттернов имеет прикладное значение в медицинской диагностике и в спортивной практике.

Исследование произвольных ритмических движений человека, выполняемых II пальцем правой руки с ограниченной амплитудой (4 мм), проводилось в сопоставлении с данными, полученными при регистрации непроизвольных колебательных микродвижений в состоянии покоя (удержания ферромагнитной пластины, прикрепленной ко II пальцу над датчиком), а также в сравнении с данными, полученными в условиях статической нагрузки на верхнюю конечность при регистрации непроизвольных микродвижений.

В качестве произвольного движения использовалось простейшее движение с одной степенью свободы – ритмическое колебание пальцем. Испытуемому давалось задание выполнять данные колебания с ограничением амплитуды до 4 мм и частотой 1 Гц.

При регистрации непроизвольных микродвижений руки в условиях статической нагрузки использовался груз из металла массой 0,3 кг, подвешиваемый на запястье правой руки обследуемого с помощью мягкого хомута. Груз вызывал напряжение мышц верхней конечности, которое было необходимо для его удержания. Это обеспечивало

увеличение афферентации от проприорецепторов к управляющим структурам нервной системы человека. Вследствие этого возникало изменение эфферентных потоков нервных импульсов, направленных к мышцам руки и тела, которые удерживали верхнюю конечность с грузом в относительно фиксированном положении [2]. При этом регистрировались колебания всей вытянутой вперед верхней конечности без учета вклада каждого биомеханического звена в отдельности (включая вклад относительно неподвижного II пальца, на котором фиксировалась пластинка).

Перед регистрацией обследуемый принимал стандартное положение тела, характерное для всех серий экспериментов: сидя, с опорой на спинку стула, с вытянутой вперед верхней конечностью, произвольно зафиксированной испытуемым в плечевом суставе при неизменной величине угла с телом (рис. 1).



Рис. 1. *Положение тела испытуемого при проведении регистрации произвольных движений верхней конечности в условиях статической нагрузки*

На дистальной фаланге II пальца правой руки обследуемого закреплялась металлическая (ферромагнитная) пластинка, располагающаяся параллельно поверхности датчика на расстоянии, не превышающем диапазон измерения датчика. Регистрация кинематограмм производилась в течение пятисекундного интервала. В каждой серии было выполнено по 15 регистраций кинематограмм с перерывами на отдых в 1 минуту через каждые 5 регистраций. В каждом из трех различных состояний (произвольных ритмических движений II пальцем, покоя, статической нагрузки) было выполнено 225 регистраций кинематограмм, т.е. 15 серий по 15 регистраций в каждой.

В один день с целью профилактики утомления производилась регистрация 5 серий. Таким образом, в течение трех дней выполнялась регистрация всех 15 серий. В течение последующих трех дней регистрировались следующие 15 серий в состоянии покоя. Последние 15 серий регистрировались в условиях статической нагрузки. Итого общее число регистраций составило 675.

Регистрация произвольных и произвольных движений человека производилась методом дистанционной регистрации кинематограмм с помощью измерительного комплекса [1, 3], который состоял из индуктивного датчика, блока первичных преобразователей и аналогово-цифрового преобразователя, подключенного непосредственно к

персональному компьютеру. Чувствительный элемент датчика представлял собой катушку индуктивности (спираль Архимеда) без сердечника, помещенную в специальный металлический корпус с полым открытым цилиндром внутри, где горизонтально располагалась данная спираль. Принцип работы такого индуктивного датчика основан на изменении магнитного потока в его контуре. При введении ферромагнитной пластины, фиксируемой на конечности человека, в магнитное поле катушки изменялось значение индуктивности последней. При этом весь магнитный поток делился на части: поток, прошедший через ферромагнитную пластину и не прошедший. Чем ближе пластина подводилась к датчику, тем большее количество линий магнитной индукции замыкалось через нее, что и вызывало изменение индуктивности катушки (рис. 2).

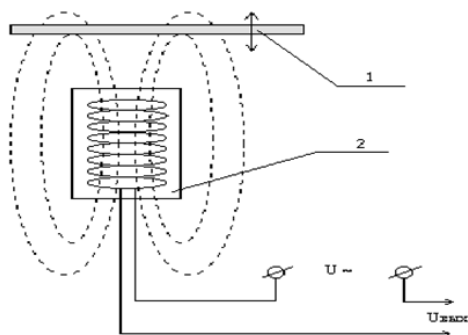


Рис. 2. Принцип работы токовихревого датчика; 1 – ферромагнитная пластина; 2 – катушка индуктивности

Измерительный комплекс позволял надежно регистрировать механические колебания в диапазоне 0–200 Гц. Система фиксировала абсолютную величину перемещения исследуемого объекта с точностью до 0,01 мм и, следовательно, форму кинематограммы (рис. 3).

Для сбора сигналов в реальном времени и аналого-цифрового преобразования использовалась плата 12-разрядного аналогово-цифрового преобразователя производства предприятия «Руднев-Шилиев», подключаемая непосредственно к слоту расширения системной платы персонального компьютера. Время преобразования сигнала аналогово-цифрового преобразователя составляло 70 мкс, входной диапазон напряжений аналогово-цифрового преобразователя позволял регистрировать сигналы в интервале 0–5 В. Плата аналогово-цифрового преобразователя работала под управлением программы *Saver2* (версия 1.0.2.0, «Руднев-Шилиев»), которая сохраняла цифровые данные в бинарный файл.

Полученные при регистрации файлы данных конвертировались с помощью программы *Converter* (версия 2.4, «Руднев-Шилиев»). В каждой выборке, полученной при регистрации, было по 500 значений (частота дискретизации сигнала – 100 Гц) изменений напряжения токовихревого датчика, отражающих форму исходного сигнала, т.е. перемещение объекта по вертикали в течение пятисекундного интервала (амплитуду механических колебаний).

Автоматизированный комплекс на базе персонального компьютера обеспечивал ре-

гистрацию и спектральный анализ кинематограмм в диапазоне частот от 0 до 50 Гц. Специализированная компьютерная программа (Кулаев С., «Анализатор сигналов 2002», версия 3.0.1.4) позволяла обрабатывать полученные от датчиков сигналы и выводить результаты в виде амплитудных значений микроперемещений исследуемого биологического объекта.

Для последующей обработки данных была сформирована таблица размером 500×15 значений амплитуды сигнала (для каждой серии). Всего было сформировано 15 таблиц для каждого из трех состояний (в сумме 45 таблиц).

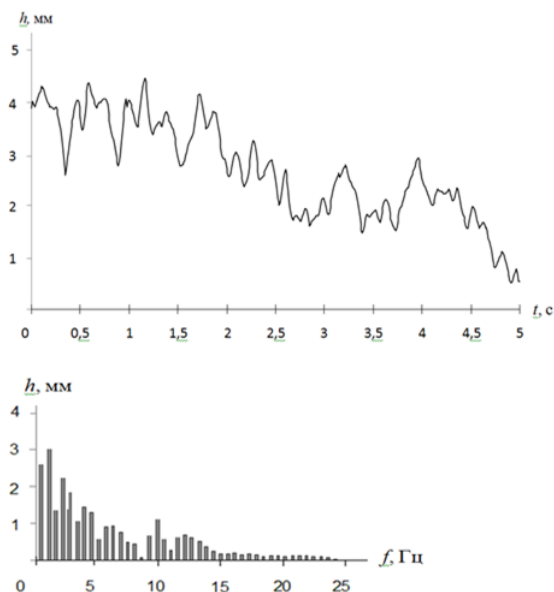


Рис. 3. Кинематограмма правой руки человека (верхний график) и ее амплитудный спектр (нижняя гистограмма) при произвольном

Исследование процессов мануальных движений проводилось с помощью пакета Neural Networks Toolbox в программной среде MatLab R2012a. Этот пакет позволяет, не обращаясь к командному окну системы MATLAB, выполнять создание, обучение, моделирование, а также импорт и экспорт нейронных сетей и данных, используя только инструментальные возможности GUI-интерфейса. Однако такие инструменты наиболее эффективны лишь на начальной стадии работы с пакетом, поскольку имеют определенные ограничения. В частности, интерфейс Neural Networks Toolbox допускает работу только с простейшими однослойными и двухслойными нейронными сетями, но при этом пользователь выигрывает во времени и эффективности решения прикладных задач [6].

При создании нейронной сети необходимо выполнить следующие операции:

- 1) сформировать последовательность входов и целей либо загрузить их из рабочей

- области системы MatLab или из файла;
- 2) создать новую нейронную сеть либо загрузить ее из рабочей области системы MatLab или из файла;
 - 3) выбрать тип нейронной сети и задать параметры процедуры обучения - в качестве оценки обучения будет вычисляется сумма квадратичных отклонений выходов сети от эталонов;
 - 4) задать критерий окончания обучения – значение отклонения, при котором обучение будет считаться законченным (0,01);
 - 5) открыть окно Network для просмотра, инициализации, моделирования, обучения и адаптации сети.

При выполнении вышеуказанной задачи определялись параметры нейронной сети: весовые коэффициенты $w_1, w_2, \dots, w_6$ и смещение b . Авторами была разработана нейронная сеть, которая позволяет определять итерационно параметры нейронной сети. Данная нейронная сеть была протестирована в среде MatLab R2012a. В качестве функционала качества работы использовалась среднеквадратичная ошибка. В результате обучения была получена нейронная сеть, являющаяся фильтром с конечной импульсной характеристикой.

Исходный сигнал $U[nT]$ поступал на вход нейронной сети, где проходил последовательно через K задержек, затем исходный сигнал и сигналы с задержкой поступали в сумматор. Таким образом, значение выходного сигнала нейронной сети определялось не только текущим значением сигнала, но и предыдущими:

$$y[nT] = w_1 U[nT] + w_2 U[nT - 1] + \dots + b,$$

где w_i – весовые коэффициенты;

b – смещение;

n – номер такта;

T – период квантования.

Структура нейронной сети в среде MatLab представлена на рисунке 4.

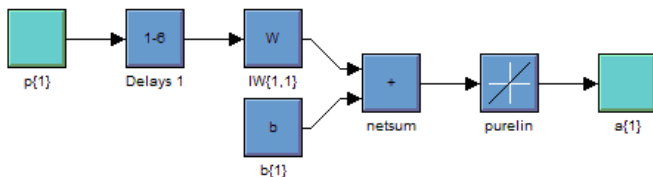


Рис. 4. Структурная схема нейронной сети, где $p(1)$ – блок входных сигналов; $Delays 1$ – блок задержек; $IW(1,1)$ – блок скалярного произведения вектора весовых коэффициентов на вектор входных данных; $b(1)$ – блок смещения; $netsum$ – сумматор; $pureline$ – линейная функция активации; $a(1)$ – блок выходных сигналов

В результате машинного обучения динамической нейронной сети на реальных данных, полученных при регистрации произвольных и непроизвольных движений руки, идентифицированы параметры нейронной сети, представленные в таблице 1.

Полученные данные позволяют идентифицировать различные типы движений по весовым коэффициентам, рассчитанным при обучении нейронной сети. Так, для произвольных движений характерно наименьшее соотношение весовых коэффициентов

Таблица 1

Параметры нейронной сети

Тип движения	весовые коэффициенты						Смещение
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
Произвольное	0,2710	0,0905	0,0087	0,0070	0,0065	0,0070	6,5723
С нагрузкой	0,2551	0,1114	0,0321	0,0042	0,0012	0,0012	0,5150
Непроизвольное	0,2784	0,1397	0,0527	0,0131	0,0021	0,0009	0,4855

w_1/w_6 , полученных в результате 6 задержек, которое составляет 38,7. В условиях статической нагрузки соотношение весовых коэффициентов увеличивается до 212,58. Наибольшее соотношение весовых коэффициентов характерно для непроизвольных движений, которое составляет 309,3. Такая динамика изменения весовых коэффициентов в случае произвольного управления движениями указывает на более существенный вклад предыдущих сигналов на значение выходного сигнала нейронной сети. Наименее выражен такой вклад в случае непроизвольных движений, что может служить количественной мерой управляющих воздействий со стороны нервной системы на двигательную систему.

Полученные результаты согласуются с результатами, представленными нами ранее [4], где для количественной оценки степени произвольности движений нами использовался метод, заключающийся в статистическом сравнении всех возможных пар получаемых выборок и подсчете числа совпадений, т.е. отсутствия статистически значимых различий при сравнении данной пары выборок. Наибольшее число пар совпадений выборок наблюдается при произвольном управлении движением – 11,6 % от общего их количества, а наименьшее – в состоянии покоя – 3,2 %, при изменении афферентации в условиях статической нагрузки – 7,1 %. Идентификация параметров нейронной сети, наряду с применением статистического анализа, также позволяет давать количественную оценку психофизиологическому состоянию человека-оператора и судить о степени утомления и произвольного контроля за движениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский М. Я., Еськов В. М., Климов О. В. К вопросу о произвольности и непроизвольности микродвижений конечности человека (треморе) // Вестник новых медицинских технологий. 2002. № 3. С. 42-45.
2. Брагинский М. Я., Бурыкин Ю. Г., Тараканов Д. В. Моделирование человеко-машинных систем с учетом влияния световых стимулов на человека-оператора // Вестник кибернетики. 2016. № 1. С. 63-73.
3. Дифференциальный датчик для регистрации высокоамплитудного тремора : Свидетельство Российской Федерации на полезную модель / Брагинский М. Я., Еськов В. М., Майстренко Е. В. - № 24920 РОСПАТЕНТ. Москва, 2002.
4. Методика количественной оценки степени произвольности движений руки / Ю. Г. Бурыкин, М. Я. Брагинский, В. И. Корчин, С. А. Третьяков // Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21, № 3. С. 271-286.
5. Никандров В. В. Психомоторика : учеб. пособие. СПб. : Речь, 2004. 104 с.
6. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики. Серия «Библиотека профессионала». М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2009. 456 с.

РОЛЬ, МЕСТО, ЗНАЧЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОЦЕССА МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАИБОЛЕЕ РЕЗУЛЬТАТИВНЫХ ПРОЕКТАХ СОЗДАНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Иванов Ф. Ф.

г. Сургут

В статье представлено состояние с автоматизированным созданием автоматизированных систем на основе моделей их жизненного цикла, перечислены различные модели, методологии и средства, ведущие к замене труда многих участников проекта по созданию АС. Уже более 20 лет формируется среда, в которой уже есть инструментальные средства, позволяющие не только проводить прямой инжиниринг (проектирование и разработку), но и созданы предпосылки полного перевода всех стадий, в том числе и при реинжиниринге, рефакторинге, на автоматизированные процедуры. Важным направлением считается разработка, управляемая моделями.

Ключевые слова: автоматизированные системы, модели, средства автоматизации при их создании.

THE ROLE, PLACE, MEANING AND FUTURE APPLICATION OF THE SIMULATION PROCESS IN MOST SUCCESSFUL PROJECTS OF CREATION OF AUTOMATED SYSTEMS

Ivanov F. F.

Surgut

The article presents the state of automated creation of automated systems based on the models of their life cycle, lists the various models, methodologies and tools that lead to the replacement of the work of many participants in the project to create as. For more than 20 years, an environment has been formed in which there are already tools that allow not only direct engineering (design and development), but also the prerequisites for the complete transfer of all stages, including reengineering, refactoring, to automated procedures. Model-driven development is considered an important area.

Keywords: automated systems, models, means of automation at their creation.

Устойчивая мировая статистика успешности проектов создания и внедрения крупных автоматизированных систем (АС) в различных сферах деятельности, и, прежде всего, в сфере управления (предприятием, производством), говорит о том, что только 50% проектов доходят до внедрения и полномасштабного использования. И причин этому, не очень благополучному положению, насчитывается не так уж и мало. Одним из важных обстоятельств можно признать и недооценку применения методов, средств, моделей, процесса моделирования, описывающих наиболее сложные и существенные, если не все, бизнес-процессы и компоненты АС в их общем жизненном цикле.

Учитывая, что существует пять наиболее внятных и распространённых способов создания АС, а именно: 1) разработка «с нуля»; 2) прототипирование; 3) покупка и установка, адаптация готовой системы; 4) покупка ядра АС с последующим наращиванием функционала и модификацией; 5) аренда ресурсов и услуг у провайдеров в области автоматизированных систем, следует изучать, понимать и прогнозировать роль, место, значение и перспективу использования моделирования в широком смысле этого процесса для повышения коэффициента успешности внедряемых проектов как непосредственно, так и путём дальнейшего развития моделирования и интеграции его в

средства и технологии реализации компонент проекта и автокодогенерации. Это тем более важно, что уже существуют удачные примеры такой сквозной технологии, при которой модели являются естественной частью всего процесса создания автоматизированной системы, а не только документальной иллюстрацией авторского представления об объекте автоматизации.

Важно в каждом конкретном способе создания АС максимально использовать методы, средства моделирования, находя и общие подходы, применимые в любом использованном варианте. И предложить такие возможности прямого применения или пути дальнейших исследований и разработок.

Как известно, общепринятый процесс в науке – моделирование, это исследование объектов познания на их моделях, а также построение и изучение моделей реально существующих объектов, процессов или явлений с целью получения объяснений этих явлений, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя[10]. При моделировании в информатике модель становится средством создания, инструментом и даже элементом выстраиваемых информационных технологий (ИТ) и АС.

Процесс моделирования включает три элемента:

1) субъект (исследователь);

2) объект исследования;

3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Но важно, чтобы модель процесса, объекта, после её проверки становилась источником дальнейшего проектирования и применения, либо с повышением уровня абстракции, либо с понижением, декомпозицией с переводом автоматизированным способом в реальные физические модели (БД, программные коды, другие компоненты АС). И в этом смысле, классическая этапность процесса моделирования в информатике претерпевает значительные изменения. Если классика: 1)подбор объекта моделирования; 2) создание модели, эксперименты и получение знаний о модели; 3)перенос знаний с модели на объект с учётом естественных ограничений (упрощений) в модели; 4) окончательное формирование знаний об объекте, то модель в информатике возникает, по сути, сразу, без подбора, а по факту существования/выделения самой предметной области и цели в виде автоматизации основных процессов (бизнес-процессов), происходящих в предметной области через принятие выбранной базовой модели жизненного цикла (ЖЦ) будущей системы, а также применения всей цепочки всевозможных моделей, используемых на различных стадиях проектирования (концептуального, логического и физического). В частности, можно перечислить эти часто используемые модели[9]:

- обобщенная математическая модель управления;
- организационно-функциональная модель объекта управления;
- инфологическая модель предметной области;
- модель внешней среды;
- модели бизнес-процессов;
- алгоритмическая модель;
- модели решения функциональных задач;
- модель организации вычислительного процесса;
- модель управления данными;
- модель обмена;
- модель накопления данных;
- модель представления знаний;
- модель обработки и др.

Ярким примером такого процесса является информационное моделирование при

создании АС: инфологическая модель (ИЛМ) предметной области-дatalogическая модель-физическая модель[1]. Причём рассмотрение даталогической модели начинается с самого высокого уровня абстракции и на основе ИЛМ с обязательным учётом других моделей (DFD, WFD, семейства IDEF- диаграмм или других), что приводит к выбору самой оптимальной, современной модели БД, способной стать источником для автоматической генерации физической модели в выбранной СУБД. Этот же подход становится необходимой и важной предпосылкой будущего реинжиниринга и рефакторинга, поскольку используемые метамодели сохраняют все такие возможности. А ныне существующие CASE-технологии обеспечивают и верификацию таких моделей и автокодогенерацию [2;3;4;6].

Идея разработок автоматизированных систем или их видов обеспечения методом управления «от моделей» существует достаточно давно [8;13] и уже приобрела усилиями, прежде всего, Стивена Меллора известной методологии, своеобразную стандартизацию через OMG (Object Management Group) в виде MDD/MDA (Model Driven Development/Architecture) и MDPB (Model Driven Pattern Based approach). Иногда их называют прямой проекцией языка предметной области на объектно-ориентированный язык программирования. Разработка, управляемая моделями - это такой стиль разработки программ, когда главными артефактами являются модели, а по ним генерируются код и другие прикладные артефакты (рисунок).

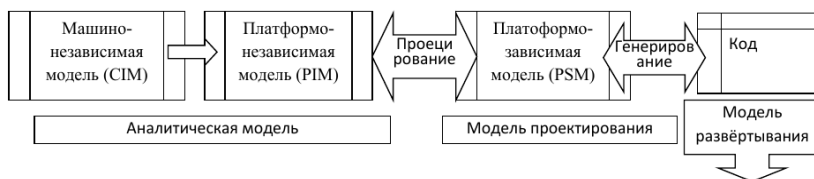


Рис. 1. Процесс MDD/MDA, как вариант управляемой моделями разработки

В MDD вводится дополнительный критерий, состоящий в том, что модель должна читаться машиной. Наиболее успешно этот подход был реализован в разработках шведской фирмы Telelogic (ныне IBM) в продукте Rhapsody[11]. В частности, в ней решены вопросы:

1. Моделирование предметной области.
2. Проверка моделей.
3. Исполнение, отладка и тестирование на уровне модели.
4. Генерация всего кода приложения, а не только структуры. Генерация кода на языках C/C++/Java/Ada.
5. Динамическая синхронизация модели и кода.
6. Адаптируемый каркас приложений реального времени.
7. Визуализация кода.
8. Использование существующих моделей.
9. Создание WEB-интерфейсов.
10. Автоматическое тестирование.
11. Управление версиями и объединение версий.
12. Генерация документации.
13. Анализ покрытия требований.
14. Анализ внесения изменений.

Не менее успешны разработки фирмы IBM Rational Software (продукт ROSE и др.). Всё это в большой степени позволяет говорить о среде проектирования и разработки, нежели как о средствах моделирования.

Ещё пример. Рефакторинг БД – это способ изменить физическую модель, созданную в выбранной СУБД, путем перевода её в логическую модель и работа в ней. Затем БД генерируется заново. Это можно сейчас осуществить с помощью пакета фирмы CA ALL FUSION DATA MODELER [5;7]. В нём же возможна операция формирования сущностей, атрибутов и связей на основе функциональной модели, полученной с помощью ALL FUSION PROCESS MODELER.

Можно в информатике рассмотреть два основных вида процесса моделирования при создании АС. Первый, это моделирование стадий и этапов ЖЦ АС, второй, моделирование основных компонентов. Можно сказать, что второй входит в первый, поскольку реализация самих стадий и этапов основано на применении моделей, о которых шла речь выше. Глобальные цели такого моделирования:

- полное представление об объектах, процессах, явлениях и документирование, переход от высшей формы абстракции к её низшим уровням с накоплением необходимых метаданных, в том числе и виде графических нотаций, способных участвовать в дальнейшем, как в процессах моделирования, так и генерации физических моделей, элементов (кода, данных, интерфейса и т.п.);
- построение моделей, их исследование, принятие оптимальных проектных решений, в том числе итерационно;
- максимально возможная автоматизация при переходе от логических к физическим моделям и их реализации в структуре АС, БД, ПО, интерфейсе, в создании проектной, технической и эксплуатационной документации.

Жизненный цикл АС – период времени, который начинается с момента принятия решения о необходимости создания информационной системы и заканчивается в момент ее полного изъятия из эксплуатации.

Методология проектирования АС описывает процесс создания и сопровождения систем в виде ЖЦ АС, представляя его как некоторую последовательность стадий и выполняемых на них процессов (этапов).

Существует много моделей ЖЦ АС и чуть меньше моделей ЖЦ ПО. Все они опираются либо на стандарты (международные и отечественные) в области ПО и АС либо являются фирменными (Microsoft, ORACLE, ARIS и др.). Исторически это были каскадная (водопадная), инкрементная (итерационная) модели, V- модель, спиральная модель, модели фирм ORACLE, MICROSOFT и др.

Приведенные выше конкретные модели и модели, связанные с процессами проектирования и разработки, в зависимости от способа создания АС, подчиняются моделям жизненного цикла (ЖЦ) систем.

В современной методологии создания АС, представленной в стандартах ИСО/МЭК 12207 (ПО), ИСО/МЭК 15288 (АС), ГОСТ 53622 (АС), устанавливается шесть стадий ЖЦ. С небольшими различиями они подробно описывают множество необходимых процессов (от 25 до 32), организованных в 5 - 7 групп. В таблице приведён сравнительный анализ стадий ЖЦ АС.

Можно сказать, что есть определённые различия по стадиям 2,3. Остальные являются близкими. Модели ЖЦ являются организующими для создания АС, а все прочие модели являются источниками для создания структуры АС, БД, БЗ, ПО, интерфейса и др.

В настоящее время считается прогрессивным и перспективным, независимо от способа создания систем, применение CASE-технологий, в основе которых заложены 1)ме-

Таблица 1

Сравнение стадий в двух стандартах (международном и отечественном)

Стадии жизненного цикла по ГОСТ Р ИСО/МЭК 15288-2005	Стадии жизненного цикла по ГОСТ Р 53622-2009
1. Замысел	1. Разработка аван-проекта
2. Разработка	2. Разработка технического задания
3. Производство	3. Проектирование
4. Применение	4. Внедрение
5. Поддержка применения	5. Сопровождение
6. Перевод в категорию непригодных для использования	6. Снятие с эксплуатации

тоды, 2) модели, 3) графические нотации и 4) CASE-средства. Все ЧЕТЫРЕ группы CASE-средств, входящих в технологию (верхние-high, средние-middle, нижние-low и смешанные) обеспечивают основные стадии проектирования и разработки АС.

В сочетании с технологиями быстрой/гибкой разработки, таких как AGILE, SCRUM, KANBAN [12] (и RUP, RAD) ускоряется процесс разработки, обеспечивается реинжиниринг АС и рефакторинг программного кода и баз данных.

Мировые и отечественные производители средств проектирования и разработки АС делятся на три группы:

1. Разработчики инструментальных средств, платформ, технологий создания АС и их компонент (IBM Rational Software, IBM Telelogic, CA, IC, ARIS, SIEMENS, Advantech и др.).
2. Создатели готовых модульных вариантов АС, ядер и компонентов и представляющих их на рынке с помощью WEB - порталов (SAP, Microsoft, ORACLE, J.D Edwards, Platinum и др.)
3. Партнёры, консалтинговые фирмы, продвигающие разработки на предприятия и в организации.

В качестве успешного результативного проекта может быть признана Единая информационная система (ЕИС), работающая в ОАО «Сургутнефтегаз» на основе покупной системы фирмы SAP R/3 (эволюционно: R/2... HANA). Сотрудничество с фирмой - разработчиком продолжается более 20 лет. В развитие основных модулей, дополнение регламентными отчётными формами было разработано множество необходимых приложений, расширяющих возможности базовой ЕИС, в том числе усилиями выпускников факультета информационных технологий (ФИТ), политехнического института СурГУ.

Аналогично, градообразующие предприятия Сургутгазпром, ТюменьЭнерго используют разработки и фирмы SAP, а также фирм ORACLE, Microsoft. Предприятия малого и среднего бизнеса города, многие муниципальные организации активно используют платформу фирмы 1С и различные её конфигурации, в том числе и комплексная система ERP 2.0 и выше.

Заключение

Что ждать от моделирования в перспективе? Главное, это соблюдение очевидной последовательности:

- создание адекватной, всеобъемлющей модели объекта управления; модели предметной области, многочисленных других моделей,
- реализация проектных решений, создание документации, в том числе и автоматически, в сочетании с разработкой, управляемой моделями;

- автогенерация системы из моделей;
- управление проектом-требованиями, изменениями, конфигурацией;
- реинжиниринг;
- рефакторинг кода и данных.

Нет сомнения в том, что научное сообщество продолжит свою работу по созданию методов, моделей, методологий и технологий создания АС, позволяющих заменить большинство из многочисленных участников проектов автоматизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диго, С.М. Базы данных. Проектирование и создание: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ. 2008. – 171 с.
2. Иванов Ф.Ф. Автоматическая кодогенерация и реинжиниринг программного обеспечения при создании автоматизированных и автоматических систем. // Вестник Сургутского государственного университета: науч. журнал. Вып. 1(30). – Сургут: Изд-во СурГУ, 2016. - С. 106-113.
3. Иванов, Ф.Ф. Кардинальные изменения в процессах создания автоматизированных информационных систем.- Северный университет, Сургут, СурГУ, 2008 г., №1(17), с.25-39.
4. Иванов, Ф.Ф. Особенности алгоритмизации в условиях перехода на автоматизированное проектирование и программирование с применением языков четвертого и пятого поколений: Международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л.Чебышёва: Тезисы. / (Сургут, 16 – 20 мая 2016 г.): Сургут: Изд-во СурГУ, 2016. - С. 141-143.
5. Комплекс эффективных решений AllFusion Modeling Suite - <https://studfiles.net/preview/4433982/page:4/>.
6. Лаврищева, Е. М. Программная инженерия. Парадигмы, технологии и CASE-средства : учебник для вузов. 2-е изд. -М.: Издательство Юрайт, 2017.-с.280.
7. Маклаков, С.В. Создание информационных систем с AllFusion Modeling Suite.- Издательство: Диалог-МИФИ: Москва: 2005г. , 428 с.
8. Разработка на основе моделей (Model Driven Development) с примерами использования PowerDesigner - <https://www.arbinada.com/fr/node/28>.
9. Советов, Б. Я. Информационные технологии : учебник для прикладного бакалавриата / Б. Я. Советов, В. В. Цехановский. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2016. - 263 с.
10. Советов, Б.Я. Моделирование систем: Учебник для академического бакалавриата / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 343 с.
11. Среда разработки встраиваемых систем и приложений реального времени на основе визуального моделирования с использованием языка UML - IBM Rational / Telelogic Rhapsody - <http://www.interface.ru/home.asp?artId=19785>.
12. Стивен Меллор. AGILE MDA - Гибкая/быстрая разработка. - <http://2008.secrus.org/ru/%40pageid=4548&submissionid=5163.htm>.
13. Стивен Меллор, Энтони Кларк, Такао Футагами. Разработка на базе моделей.- <https://www.osp.ru/os/2003/12/183682/>.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОАГУЛЯЦИИ С ИСТОЧНИКОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО СО СТОКОМ

Галкин В. А., Ладыгин Н. И.

Сургутский государственный университет

Моделирование процесса коагуляции с источником реализуется при помощи уравнения Смолуховского:

$$\frac{df_i(t)}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi(i-j, j) f_{i-j} f_j - f_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(i, j) f_j + q_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где неотрицательная величина q_i определяет интенсивность, с которой частицы массы $i > 0$ вводятся в коагулирующую систему. Такого рода задачи возникают при описании роста пор в металлах при облучении потоком быстрых нейтронов, которые, выбивая атомы из кристаллической решетки, служат причиной возникновения пор. При описании работы реактивных двигателей приходится учитывать коагуляцию слипающихся частичек, которые возникают в процессе горения топлива, т. е. здесь источником коагулирующих частиц является химическая реакция, протекающая во внешней среде [1].

При моделировании реальных физических процессов, например, коагуляция молока, синтез поликапролактама, дождь из атмосферных облаков и т.д. требуется ввод некоторого максимального значения массы. Частица с массой превышающей данное значение выпадает в осадок и в последующем взаимодействии участия не принимает. В такой формулировке уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{df_i(t)}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi(i-j, j) f_{i-j} f_j - f_i \sum_{j=1}^M \Phi(i, j) f_j + q_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где значение M – максимальная масса частицы или граница стока. Все частицы, превысившие по массе M , например, плотные фракции молока, полимеры, капли дождя и т.д., сваливаются в сток или осадок.

Анализируя уравнение (1), (2) в рамках первого момента, соответствующего отнесенной к массе системы, сумма первых двух членов в правой части уравнения, отвечающих за появление и уничтожение частиц соответственно, в силу закона сохранения массы, равна нулю в (1) и не равна нулю в (2). Таким образом, наблюдается переход соотношения сохранения в соотношение диссипации. Соответственно изучение диссипативного члена или стока, образованного суммой первых двух членов в правой части уравнения (2).

Для построения решения уравнения (2) используется метод, основанный на разностной схеме Эйлера для кинетического уравнения Смолуховского. Для тестирования алгоритма использован случай $\Phi(\mu, \mu_1) = 1$, когда уравнение (2) имеет единственное решение. Указанные решения позволяют построить класс нестационарных диссипативных автомодельных решений уравнения Смолуховского [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-47-860004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В.А. Уравнение Смолуховского. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 336 с.

ТЕНДЕНЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАССОВЫХ ОТКРЫТЫХ ОНЛАЙН КУРСОВ И ОТКРЫТОСТЬ ДАННЫХ

Гришмановский П. В., Гришмановская О. Н.

Сургутский государственный университет, grishmanovsky@yandex.ru

Ключевые слова: электронные образовательные ресурсы, массовые открытые онлайн курсы, открытые данные.

Современное образование сложно представить без применения информационных технологий. Появляются возможности совершенствовать процесс обучения, повысить качество образования. Появление массовых открытых онлайн курсов (МООК) в развитии дистанционного образования позволяет расширить возможности граждан в получении образования и повышения квалификации вне зависимости от географического положения [1]. Однако, интенсивное использование электронных образовательных ресурсов (ЭОР) вызывает неоднозначную реакцию в академической среде и в обществе в целом, обусловленную чрезвычайной актуальностью вопроса о качестве предлагаемых МООК и применяемых ЭОР.

Современные информационные технологии позволяют излагать материал, используя, наряду с традиционным текстом, различные формы учебного контента, такие как аудио и видео, графические композиции и анимацию и пр. Цифровые средства контроля позволяют оценить прогресс и результаты обучения, эффективность использования методик и форм представления материала, который, при необходимости, может быть быстро подвергнут корректировке, дополнению и углублению.

Процессы трансформации ИТ-инфраструктур, повышение уровня проникновения интернета и массовость мобильных устройств обуславливают появление большого количества новых образовательных приложений и инновационных технологий обучения. Ряд стран, таких как США, Китай, Великобритания, Австралия, Скандинавия и др., активно проводят информатизацию образования и разрабатывают комплексы национальных стандартов образовательных технологий [2], главная задача которых – стимулировать наибольший эффект и согласованность использования ИКТ в учебном процессе за счет сокращения издержек и более явного возврата инвестиций, а также использования открытых данных. В ряде стран подобные открытые инициативы активно поддерживаются властями и считаются стратегическими, например, в Колумбии, Уругвае, Индонезии и Австралии. В Южной Корее внедрение ИКТ в системе образования выполняется централизованно под руководством Министерства образования, науки и технологий и имеет стратегическую цель построения самого эффективного и самого креативного учебного процесса в регионе за счет использования передовых технологий, что позволит стать образовательным хабом всей Юго-восточной Азии. Одним из признанных глобальных лидеров в области построения эффективной системы образования является Сингапур, развивающий инновационные модели учебного процесса для информационного общества будущего в рамках реализации 10-летнего плана информатизации.

Финляндия опережает все европейские страны, следуя сразу за Сингапуром, Южной Кореей и Японией, реализуя с 2011 г. государственную программу обучающих решений (Learning Solutions Programme) с тем, чтобы разработать глобально конкурентоспособные решения, новые подходы и навыки для современной образовательной среды и построить экосистему обучения, не привязывающую учебный процесс ко времени или к месту [2].

В то время как большинство теперь признают, что МООК на базе ЭОР быстро распространяются в высшем образовании, также отмечается, что МООК не могут так легко заменить традиционную форму высшего образования [3]. Существует также и барьер доступа к образованию: подавляющее большинство МООК на сегодняшний день создано на английском языке и языковой барьер может быть добавлен к барьеру доступа к технологиям для многих групп населения, хотя ситуация в этом отношении стремительно меняется как в мире, так и в России.

Другой набор проблем обусловлен потенциальным воздействием МООК на академическую жизнь, которое изучается уже на протяжении более 10 лет. Например, по мнению исследователей [4], продвижение МООК способствуют нерегулярности академического труда и изменению экономических моделей высшего образования, что угрожает нынешним высшим учебным заведениям. Также вызывая тревогу этические последствия, включая мошенничество, плагиат и нарушения научной этики. На основе анализа больших наборов данных, эти исследователи отметили четыре причины, по которым студенты подписываются на МООК: это потребность изучить новую тему или расширить имеющиеся знания, интерес испытать МООК как технологию, личный интерес к предмету курса и желание получить сертификат об окончании. При этом именно возможность получения сертификата отмечена как ключевая у 80% опрошенных студентов [4]. Таким образом, университетское образование в форме МООК прочно закрепилось как экспортный продукт в мире, начав свое распространение преимущественно с североамериканских университетов. Две характеристики отличают МООК от модели электронного обучения: их масштабность и открытость, главным образом подразумевая бесплатный доступ. Однако, изначально МООК могут быть бесплатными, но поставщики могут брать плату за дополнительные услуги, в большинстве такие как аккредитация и сертификация, что связывает МООК с коммерческой выгодой, в том числе в ущерб качеству доступного образования. Новый рынок более гибкого типа недорогого обучения ориентирован на молодых людей с высшим образованием, которые стремятся улучшить свой карьерный профиль [5].

Однако, как исследования в области тенденций МООК, так и выбор потенциальными обучающимися тематики и поставщика МООК, затрудняются вследствие недостатка информации, которая позволяла бы оценить качество МООК с точки зрения различных групп в зависимости от их мотивации. Эта информация может включать как установленные законодательно показатели качества МООК и вуза-поставщика, так и основные характеристики МООК и деперсонализированные данные о контингенте, такие как приток и отток обучающихся, динамику прохождения, отказ от продолжения и успешность освоения курса и др. Определение состава этой информации и предоставление ее как открытых данных позволить строить востребованные и социально значимые сервисы, повышающие доступность и качество образовательных услуг и эффективность системы образования в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актуальность разработки и структура электронного образовательного ресурса «компьютерные сети» // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов, 2011 – 10(64), стр.89-90 [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://jurnal.org/articles/2011/inf16.html>
2. Электронная образовательная среда [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://filearchive.cnews.ru/img/reviews/2015/12/04/otchet_elektronnaya_obrazovatel'naya_sreda_final_15.pdf

3. Challenges to producing high-quality distance learning. Gill Kirkup // Open Learning: The Journal of Open, Distance and e-Learning. Volume 29, 2014 – Issue 1, pp.1-4. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1080/02680513.2014.922411>.
4. Understanding the massive open online course (MOOC) student experience: An examination of attitudes, motivations, and barriers. Heather B. Shapiro, Clara H. Lee, Noelle E. Wyman Roth // Computers & Education 110 (2017) 35-50 [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.elsevier.com/locate/compedu
5. Massive open online courses in higher education: A data analysis of the MOOC supply. Julieth E. Ospina-Delgado, Ana Zorio-Grima, María A. García-Benau // Intangible Capital, 2016 – 12(5), pp. 1401-1450. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.3926/ic.798>

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА, КАК МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

Головина Н. Я.

г. Сургут

Предложен алгоритм приближения теоретической модели кривой деформирования, сформулированной, как «модифицированный» закон Рамберга-Осгуда к экспериментальной кривой деформирования. Предложена и реализована идея о том, что кривая деформирования удовлетворяет некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, для построения единственного решения которого требуется задание напряжения и касательного модуля (по два условия) на каждом конце интервала определения.

Ключевые слова: Закон Рамберга-Осгуда, кривые деформирования, решение краевой задачи, обработка экспериментальных данных.

ALGORITHM FOR SOLUTION OF THE ORDINAL DIFFERENTIAL EQUATION OF 4TH ORDER AS A MODEL OF PLASTIC MATERIAL

Golovina N. Ya.

Surgut

An algorithm of actions is proposed that approximate the theoretical model of the deformation curve, formulated as the "modified" Ramberg-Osgood law to the experimental deformation curve. The idea that the deformation curve satisfies some fourth-order ordinary differential equation is proposed and implemented, to build a unique solution of which, you need to specify a stress and a tangent module (two conditions) at each end of the definition interval.

Keywords: Ramberg-Osgood law, deformation curves, solution of a boundary value problem, experimental data processing.

История пластичности как науки началась в 1864 году, когда Треска [1] опубликовал результаты экспериментов по штамповке и экструзии и сформулировал свой знаменитый критерий текучести. Несколько лет спустя, используя результаты Трески, Сен-Венан [2] и Леви [3] заложили некоторые основы современной теории пластичности. В течение следующих 75 лет прогресс был медленным и неравномерным, хотя

важный вклад внесли фон Мизес [4], Хенки [5], Прандтль [6], Хилл [7] и другие. Только примерно с 1945 года появилась единая теория.

Теории пластичности делятся на две категории: физические теории и математические теории. Физические теории стремятся объяснить, почему металлы текут пластически. Глядя на материалы с микроскопической точки зрения, была предпринята попытка определить, что происходит с атомами, кристаллами и зёрнами материала, когда происходит пластическое течение. Математические теории, с другой стороны, являются феноменологическими по своей природе и пытаются формализовать и привести в соответствующую форму результаты макроскопических экспериментов, не углубляясь в их физическую основу. Объединение этих двух подходов в единую теорию пластичности, одновременно объяснит поведение материала и предоставит инженеру и ученому необходимые инструменты для практического применения.

В настоящее время разработан обширный набор математических моделей нелинейного поведения упругопластических материалов [8]. Большинство аналитических исследований основаны на классической модели Рамберга-Осгуда (1):

$$\varepsilon = A\sigma + B\sigma^\eta$$

где $\varepsilon = f(\sigma, A, B, \eta)$ – деформация, как функция напряжения и трех параметров A, B, η , отражающих свойства материала. Отметим, что параметр η – безразмерный, а параметры A, B имеют размерность $[\text{Па}]^{-1}$.

Проведенные исследования модели Рамберга-Осгуда выявили недостатки, ограничивающие ее точность, а именно:

Во-первых, для модели Рамберга-Осгуда касательный модуль не может принимать нулевого значения, что несовместимо с определением теоретической прочности.

Во-вторых, касательный модуль в модели Рамберга-Осгуда является монотонно убывающей функцией, и поэтому кривая деформирования не имеет линейного (упругого) участка.

В результате была предложена модифицированная форма модели Рамберга-Осгуда, которая лишена указанных выше недостатков (2).

$$\sigma^* = \begin{cases} E_0^* \varepsilon^* & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ E_0^* \varepsilon^* - (E_0^* - 1) \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Модифицированная модель сформулирована в нормированных координатах. Здесь $(\varepsilon^*, \sigma^*)$ нормированные координаты точки, разделяющей зоны упругих и пластических деформаций (предел упругости); $E_0^* = \sigma_e^* / \varepsilon_e^*$ – значение упругого касательного модуля к кривой деформирования; η – безразмерный параметр материала.

В основу исследования модели Рамберга-Осгуда была положена идея о том, что точное описание зависимости между напряжением и деформацией в зоне пластичности возможно с помощью многочлена произвольной степени [1]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_m\varepsilon^m & \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Логично отметить, что решение модифицированной модели следует искать, как решение дифференциального уравнения четвертого порядка.

Задаем граничные условия на концах интервалов:

$$\text{При } \varepsilon^* = 0 : \quad \begin{cases} \sigma_{(\varepsilon^*=0)}^* = 0 \\ \left. \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \right|_{\varepsilon^*=0} = E_0^* \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{При } \varepsilon^* = \varepsilon_e^* : \quad \begin{cases} \sigma_{(\varepsilon^*=\varepsilon_e^*)}^* = E_0^* \varepsilon_e^* \\ \left. \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \right|_{\varepsilon^*=\varepsilon_e^*} = E_0^* \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{При } \varepsilon^* = 1 : \quad \begin{cases} \sigma_{(\varepsilon^*=1)}^* = 1 \\ \left. \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \right|_{\varepsilon^*=1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Удовлетворяя граничные условия, получаем систему восьми линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными постоянными интегрирования:

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = E_0^* \\ E_0^* \varepsilon_e^* + C_2 \varepsilon_e^{*\eta} + C_3 \varepsilon_e^{*4-\eta} = E_0^* \varepsilon_e^* \\ E_0^* + C_2 \eta \varepsilon_e^{*\eta-1} + C_3 (4-\eta) \varepsilon_e^{*3-\eta} = E_0^* \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \varepsilon_e^* + c_2 \varepsilon_e^{*\eta} + c_3 \varepsilon_e^{*4-\eta} = E_0^* \varepsilon_e^* \\ c_1 + c_2 \eta \varepsilon_e^{*\eta-1} + c_3 (4-\eta) \varepsilon_e^{*3-\eta} = E_0^* \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 \eta + c_3 (4-\eta) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Удовлетворяя граничным условиям, и подставляя в (6) получим уравнение кривой деформирования.

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} C_0 + C_1 \varepsilon^* + C_2 \varepsilon^{*\eta} + C_3 \varepsilon^{*4-\eta} & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ C_0 + c_1 \varepsilon^* + c_2 \varepsilon^{*\eta} + c_3 \varepsilon^{*4-\eta} & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

Постоянные интегрирования $C_0, C_1, C_2, C_3, c_0, c_1, c_2, c_3$ определяются из (5) и (6). Параметры ε_e^* и η определяются, как индивидуальные характеристики материала, по приведенному ниже алгоритму.

Здесь будет использована методика обработки экспериментальных данных, основанная на численном поиске минимума суммарного квадратичного отклонения теоретической кривой деформирования, как функции двух параметров, от выборки конечного числа экспериментальных точек.

Для определения параметров ε_e^* и η использована методика обработки экспериментальных данных, основанная на численном поиске минимума суммарного квадратичного отклонения теоретической кривой деформирования, как функции двух параметров, от выборки конечного числа экспериментальных точек.

Шаг-1.

Назначаем в качестве пробного предела упругости последовательно каждую экспериментальную точку кривой деформирования в нормированных координатах. Подбираем такой показатель η , чтобы теоретическая кривая, построенная с таким пробным пределом упругости, имела минимальное суммарное квадратичное отклонение от нормированной экспериментальной. Перебирая все экспериментальные точки и назначая их за предел упругости будет найдена такая экспериментальная точка $(\varepsilon_n^*, \sigma_n^*)$, для

которой суммарное квадратичное отклонение теоретической кривая деформирования от экспериментальной окажется минимальным.

Шаг-2.

Координаты точек, ближайших к определенной в шаге 1 точке задают прямоугольную область с координатами углов:

$$(\varepsilon_{n-1}^*, \sigma_{n-1}^*), (\varepsilon_{n+1}^*, \sigma_{n-1}^*), (\varepsilon_{n+1}^*, \sigma_{n+1}^*), (\varepsilon_{n-1}^*, \sigma_{n+1}^*).$$

Покроем эту область прямоугольной сеткой 5×5 . Каждый узел этой сетки будем брать за пробный предел упругости и проводить через неё теоретическую кривую с таким параметром η , чтобы суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек было минимальным. В результате будет обнаружена точка, через которую можно провести теоретическую кривую с минимальным суммарным квадратичным отклонением от выборки экспериментальных точек. Соседние с найденной точкой узлы определяют новую прямоугольную область, линейные размеры которой в 10 раз меньше исходной области.

Через достаточно малое число итераций стороны стягивающейся области достигнут величин инструментальных погрешностей измерения деформаций и напряжений.

Найденная точка предела упругости и соответствующий ей показатель степени определяют все физические параметры теоретической кривой.

Определив физические параметры, можно построить и саму кривую деформирования.

Ниже приведены результаты обработки на примере стали 20ХГР на выборке из 30 экспериментальных точек.

На рис.1 изображены теоретическая и нормированная экспериментальная кривые деформирования.

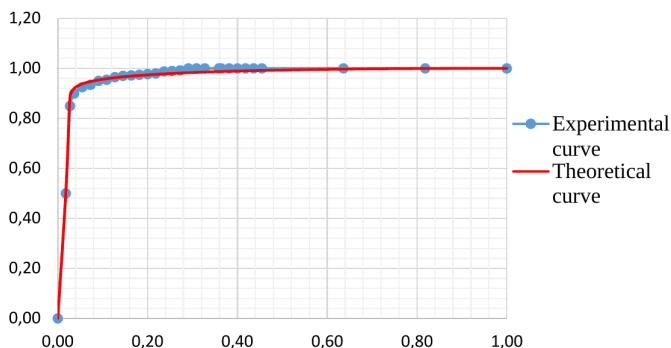


Рис. 1. Теоретическая и экспериментальная кривые деформирования для стали 20ХГР

Теоретическая кривая, построенная по изложенной выше методике, имеет высокую точность соответствия экспериментальным данным. Для стали 20ХГР суммарное квадратичное отклонение составило чуть более 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. C.R. Acad. Sci. Paris, 1864; 59, pp. 754-758.
2. B. de Saint-Venant, Memoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. Compt. Rend., 70, 1870, pp. 473-480.
3. M. Lévy, Memoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, Compt. Rend., 70, 1870, pp. 1323-1325.
4. von Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Göttin. Nachr. Math. Phys., 1913; 1, pp. 582-592.
5. Hencky, H. Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nachspannungen / H. Hencky // Z. Angew. Math. Mech.- 1924. -Vol. 4. P. 323-334.
6. Л. Прандтль, Spannungsverteilung in plastischen Koerpern, Труды 1-го Международного конгресса по прикладной механике, Делфт, 1924, с. 43-54.
7. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford U.P., Oxford, 1950.
8. Mendelson A. Plasticity: Theory and Application, The Macmillan Company, 1968. – 353 pp.

МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ РЕСУРСА

Головина Н. Я.

г. Сургут

Работа состоит из двух теоретических частей. Первая часть посвящена формулировке математических моделей пластических материалов без учета и с учетом упрочнения. Модели строятся как решение краевых задач для дифференциального уравнения четвертого и шестого порядка. Вторая часть посвящена формулировке математических моделей ресурса таких материалов. Рассмотрены три основные модели: модель накопления остаточных деформаций, модель накопления работы диссипации и модель расходования запаса энергии разрушения. Установлено, что наиболее консервативная из рассмотренных моделей ресурса – модель накопления остаточных деформаций. Также установлено, что предел усталости полностью определяется пределом упругости и равен ему.

Ключевые слова: Закон Рамберга-Осгуда, кривые деформирования, решение краевой задачи, обработка экспериментальных данных.

MODELS OF PLASTIC MATERIALS AND THEIR RESOURCE

Golovina N. Ya.

Surgut

The work consists of two theoretical parts. The first part is devoted to the formulation of mathematical models of plastic materials without and with regard to hardening. Models are constructed as a solution of boundary value problems for a fourth and sixth order differential equation. The second part is devoted to the formulation of mathematical models

of the resource of such materials. Three main models are considered: a model of the accumulation of residual deformations, a model of accumulation of dissipation work, and a model of the expenditure of the energy of destruction. It has been established that the most conservative of the considered resource models is the model of the accumulation of residual deformations. It is also established that the fatigue limit is fully determined by the elastic limit and is equal to it.

Keywords: Ramberg-Osgood law, deformation curves, solution of a boundary value problem, experimental data processing.

Модель Рамберга-Осгуда была применена при исследовании ресурса пластичных материалов. Известно, что соотношение Коффина – Мэнсона для модели материала в соответствии с законом Рамберга-Осгуда не допускает ненулевого предела выносливости. В связи с этим были предприняты попытки модифицировать модель Рамберга-Осгуда. Они оказались неудачными, поэтому была предложена альтернатива в виде «модифицированного закона Рамберга-Осгуда» [1,2]. Закон постулирует степенную зависимость напряжения от деформации, а не наоборот, как в классическом законе Рамберга-Осгуда. Это позволило моделировать теоретический предел прочности на кривой деформирования, как требование равенства нулю первой производной напряжения по деформации. Второе принципиальное отличие модифицированного закона заключается в том, что для кривой деформирования постулируется начальный линейный участок. В результате для стали 20ХГР и стали 35 модифицированный закон имеет хорошее совпадение с экспериментальными данными. Для стали 20ХГР среднеквадратичное отклонение 2%, а для стали 35 – 5%. Более того модифицированный закон позволил получить закон Коффина-Мэнсона с ненулевым пределом усталости.

В 1943 г. В. Рамберг и В. Осгуд разработали математическую модель упругопластического материала [3]. Уравнение Рамберга-Осгуда было создано для описания нелинейной зависимости между напряжением и деформацией материалов, диаграммы деформирования которых имеют только зону пластичности.

Выберем точку абсолютного максимума на экспериментальной и теоретической диаграмме деформирования и назовем её точкой предела прочности с координатами $(\varepsilon_c, \sigma_c)$. Отбросим все точки, лежащие справа от точки предела прочности, как не отражающие свойств неразрушенных материалов. Нормируем напряжения σ на напряжение предела прочности σ_c :

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c} \quad (1)$$

а деформации ε – на деформацию предела прочности ε_c :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad (2)$$

Закон Рамберга-Осгуда (1) в безразмерных переменных приводится к виду:

$$\varepsilon^* = A^* \sigma^* + B^* (\sigma^*)^\eta \quad (3)$$

Здесь нормированные параметры связаны с ненормированными соотношениями:

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{A \sigma_c}{\varepsilon_c} \\ B^* &= \frac{B}{\varepsilon_c} \sigma_c^\eta \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь все параметры, характеризующие свойства материала, являются безразмерными. Соответственно, все кривые деформирования, включая экспериментальные, для всех материалов имеют две общие точки с безразмерными координатами (0;0) и (1;1). Установлено:

- 1) классический закон Рамберга-Осгуда не совместим с определением теоретической прочности

$$E^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \quad (5)$$

- 2) классический закон Рамберга-Осгуда определяет касательный модуль, как строго монотонно убывающую функцию, что эквивалентно утверждению, что характерная точка кривой деформирования, предел пропорциональности/упругости, совпадает с начальной точкой кривой деформирования, т.е. линейный участок в классическом законе Рамберга-Осгуда отсутствует.

Модифицированная модель Рамберга-Осгуда

В качестве альтернативы классическому закону Рамберга-Осгуда была предложена модифицированная модель. Модель определяет напряжение, как степенную функцию деформации, а не наоборот. На отрезке $0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*$ был постулирован строго линейный закон, так как на этом участке не происходит никаких разрывов упругих связей, и процесс деформирования является строго обратимым. Это обобщение эквивалентно тому, что кривая деформирования делится на две принципиально различные области, разделенные характерной для каждого материала точкой – точкой предела упругости с координатами $(\varepsilon_e^*, \sigma_e^*)$.

Первый отрезок кривой деформирования – строго линейный и обратимый, с постоянным модулем упругости:

$$E_e^* = \frac{\sigma_e^*}{\varepsilon_e^*}$$

Второй участок определяет процесс нелинейного и необратимого процесса деформирования - пластичности, при котором происходят микроскопические разрывы упругих связей в материале. Для второго участка кривой деформирования становится удобным введение промежуточной переменной:

$$0 \leq \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right) \leq 1$$

Тогда математическое описание кривой деформирования становится следующим:

$$\sigma^* = \begin{cases} E_e^* \varepsilon^* & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ E_e^* \left[\varepsilon^* - \frac{(1 - \varepsilon_e^*)}{\eta} \left(\frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta \right] & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

В соотношении (6) η выражается через параметры модели E_e^* и ε_e^*

$$\eta = \frac{(1 - \varepsilon_e^*)}{(1 - 1/E_e^*)} \quad (7)$$

Независимые параметры материала ε_e^* , E_e^* определяются из требования минимума среднеквадратичного отклонения Δ теоретической кривой (6) от выборки из 30 экспериментальных точек для стали 20ХГР (Таб.1).

Таблица 1

ε_e^*	σ_e^*	E_e^*	η	Δ
0,031200	0,942400	30,205128	1,001972	0,01831

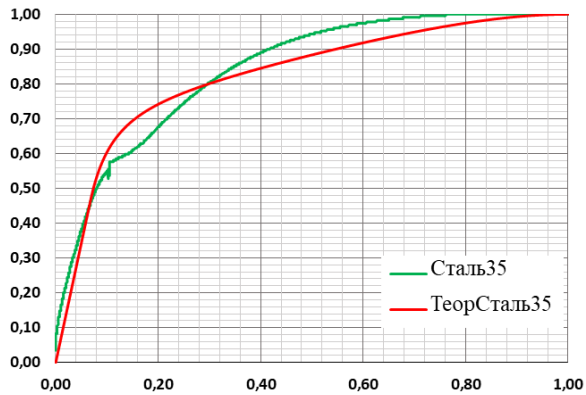


Рис. 1. Кривая деформирования модифицированного закона Рамберга-Осгуда для стали 20ХГР на выборке из 30 экспериментальных точек

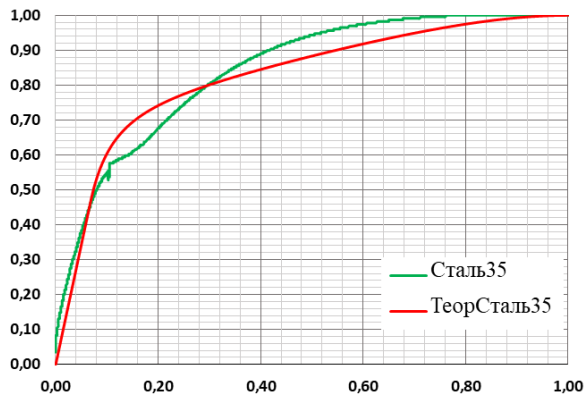


Рис. 2. Кривая деформирования модифицированного закона Рамберга-Осгуда для стали 35 на выборке из 581 экспериментальной точки

Теоретическая кривая с параметрами, указанными в таблице 1 показана на рис. 1 совместно с экспериментальными точками.

Таким образом предложена модель пластичного материала свободная от недостатков

закона Рамберга-Осгуда.

Модель материала, предложенная, как альтернатива закону Рамберга-Осгуда использована при формулировке моделей ресурса для отнулевого цикла мягкого нагружения. Рассмотрены три модели ресурса: модель накопления остаточных деформаций; модель накопления работы диссипации и модель расходования запаса энергии разрушения.

Модель ресурса как модель «накопления остаточных деформаций»

В качестве меры поврежденности в данной модели выбрана остаточная деформация. Остаточная деформация в цикле ε_{Δ}^* вычисляется:

$$\varepsilon_{\Delta}^* = \Delta\varepsilon^* - \frac{\Delta\sigma^*}{E_e^*} \quad (8)$$

Из (8) максимальная остаточная деформация, когда $\Delta\varepsilon^* = 1$, $\Delta\sigma^* = 1$, определяется соотношением:

$$\varepsilon_{\Delta max}^* = 1 - \frac{1}{E_e^*} \quad (9)$$

Если полагать, что остаточные деформации в каждом цикле суммируются, то гарантированное число циклов нагружения с размахом $\Delta\sigma^*$ в соответствии с (8;9) вычисляется из соотношения:

$$M \leq \frac{\varepsilon_{\Delta max}^*}{\varepsilon_{\Delta}^*} = \frac{1 - \frac{1}{E_e^*}}{\Delta\varepsilon^* - \frac{\Delta\sigma^*}{E_e^*}} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*}\right)^{\eta}} \quad (10)$$

В результате, для данной модели накопления повреждений получено следующее соотношение Коффина-Мэнсона:

$$\Delta\sigma^* = E_e^* \varepsilon_e^* + E_e^* (1 - \varepsilon_e^*) M^{-1/\eta} - (E_e^* - 1) M^{-1} \quad (11)$$

Причем показатель степени η выражается через параметры материала модифицированного закона Рамберга-Осгуда в соответствии с (7).

Следует отметить, что модифицированная модель приводит, в отличие от классической модели Рамберга-Осгуда, к ненулевому пределу выносливости, что соответствует экспериментальным данным.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Delta\sigma^* = E_e^* \varepsilon_e^* = \sigma_e^* \quad (12)$$

Из предложенной модели ресурса следует, что предел выносливости оказывается строго равен пределу упругости σ_e^* .

Модель ресурса как модель «накопления работы диссипации»

В качестве меры поврежденности выбрана работа диссипации.

Работа диссипации в цикле A_{Δ}^* вычисляется:

$$A_{\Delta}^* = \int_0^{\Delta\varepsilon^*} (\sigma_+^* - \sigma_-^*) d\varepsilon^* = \begin{cases} 0 & 0 \leq \Delta\varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ (E_e^* - 1) (1 - \varepsilon_e^*) \frac{(\eta + 2)}{(\eta + 1)} \left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta+1} & \varepsilon_e^* \leq \Delta\varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Если точка реверса совпадает с точкой предела прочности $\Delta\sigma^* = 1$ и $\Delta\varepsilon^* = 1$, предельная работа диссипации вычисляется:

$$A_{max}^* = (E_e^* - 1)(1 - \varepsilon_e^*) \frac{(\eta + 2)}{(\eta + 1)} \quad (14)$$

Если полагать, что работа диссипации в каждом цикле суммируется, то гарантированное число циклов нагружения с размахом $\Delta\sigma^*$ в соответствии с (13;14) вычисляется из соотношения:

$$M \leq \frac{A_{max}^*}{A_{\Delta}^*} = \frac{(E_e^* - 1)(1 - \varepsilon_e^*) \frac{(\eta + 2)}{(\eta + 1)}}{(E_e^* - 1)(1 - \varepsilon_e^*) \frac{(\eta + 2)}{(\eta + 1)} \left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta + 1}} = \left(\frac{1 - \varepsilon_e^*}{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta + 1} \quad (15)$$

В результате, для данной модели накопления повреждений получено следующее соотношение Коффина-Мэнсона:

$$\Delta\sigma^* = E_e^* \varepsilon_e^* + E_e^* (1 - \varepsilon_e^*) M^{-1/(\eta + 1)} - (E_e^* - 1) M^{-\eta/(\eta + 1)} \quad (16)$$

Данная модель ресурса, сформулированная с использованием модели материала (6), также, как и модель «накопления остаточных деформаций» приводит к ненулевому пределу выносливости и его равенству пределу упругости.

Модель ресурса как модель «расхода запаса энергии разрушения»

В этой модели мерой накопления повреждений является расход запаса энергии разрушения.

Расход части запаса энергии разрушения в цикле U_{Δ}^* вычисляется:

$$U_{\Delta}^* = \int_0^{\Delta\varepsilon^*} (E_e^* \varepsilon_e^* - \sigma_+^*) d\varepsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq \Delta\varepsilon^* \leq \varepsilon_e^* \\ E_e^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)^2}{\eta(\eta + 1)} \left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta + 1} & \varepsilon_e^* \leq \Delta\varepsilon^* \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

Запас энергии разрушения высвобождается (расходуется) за один цикл при нагружении до предела прочности $\Delta\sigma^* = 1$ и $\Delta\varepsilon^* = 1$:

$$U_{max}^* = E_e^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)^2}{\eta(\eta + 1)} \quad (18)$$

Зная запас энергии разрушения U_{max}^* и расход энергии разрушения за цикл U_{Δ}^* из (17;18), получено число гарантированных циклов:

$$M \leq \frac{U_{max}^*}{U_{\Delta}^*} = \frac{E_e^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)^2}{\eta(\eta + 1)}}{E_e^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)^2}{\eta(\eta + 1)} \left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta + 1}} = \left(\frac{\Delta\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{-(\eta + 1)} \quad (19)$$

Число гарантированных циклов в точности совпадает с результатом, полученным для модели «накопления работы диссипации» (15). Соответственно, для данной модели накопления повреждений и соотношение Коффина-Мэнсона совпадает с (16).

Заключение

Из анализа полученных результатов следует, что модель остаточных деформаций является более консервативной по сравнению с двумя другими, так как при одном и том же размахе напряжений гарантирует меньшее число безопасных циклов нагружения.

Все модели допускают возможность экстраполяции на многоцикловую усталость (ресурс) и приводят к близким, с точностью до 2% от предела прочности, размахам напряжений для числа циклов, превышающего десять тысяч.

Все модели дают точное равенство предела выносливости и предела упругости.

Такой вывод является косвенным подтверждением правильности или, по крайней мере, обоснованности гипотезы существования на диаграмме деформирования строго линейного и обратимого участка, на котором не происходит никаких необратимых изменений при малоцикловой или многоцикловой нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов П.А., Лурье С.А., Гавриков М.Ю. Проблема экстраполяции малоцикловой усталости ПКМ на ресурс // Знание. – 2016. – № 7-1 (36). – С. 29-36.
2. Белов П.А., Лурье С.А., Гавриков М.Ю. Экстраполяция малоцикловой усталости ПКМ на ресурс (вторая модель) // Sciences of Europe. – № 6. – 2016. – С 10-15.
3. Ramberg, W., Osgood, W. R. Description of stress-strain curves by three parameters / National Advisory Committee For Aeronautics, Technical Note No. 902, Washington DC, 1943.

Секция «Механика композитных материалов и конструкций»

ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Горынин Г. Л.

г. Сургут

Рассмотрены проблемы и методы механики композитных конструкций, приведен краткий обзор существенных результатов, имеющих принципиальное значение для развития общей теории композитных конструкций.

Ключевые слова: композитная конструкция, физически нелинейные материалы, метод асимптотического расщепления, модель локального линейно упругого тела.

PROBLEMS AND METHODS OF COMPOSITE STRUCTURE MECHANICS

Gorynin G. L.

Surgut

Problems and methods of composite structure mechanics are considered. The overview about substantial results is listed. These results are important for the general theory of composite structures.

Keywords: composite structure, physically nonlinear material, method of asymptotic splitting, local linear elastic material model.

Если говорить о проблемах прочности и жесткости конструкций, то таковые возникают в самых разных областях: в автомобилестроении, в самолетостроении, при создании космических аппаратов и станций, при строительстве гражданских, военных, ядерных и транспортных сооружений, при обеспечении жесткости процессоров и соединений суперкомпьютеров в условиях больших градиентов температур. И везде при решении этих проблем наблюдается общая тенденция – вытеснение композитными конструкциями их однородных аналогов. Это связано с тем, что возможности однородных конструкций очень часто оказываются исчерпанными и не могут справиться с задачами современности, когда уровень требования к таким конструкциям постоянно

возрастает. Типичные требования, которые имеют тенденцию постоянно усложняться, это снижение веса, изменение температурных режимов, возрастание механических нагрузок.

Следует отметить, что относительно самого термина «композитные конструкции» ведутся дискуссии. Некоторые полагают, что композитными могут являться только материалы, а для конструкций следует использовать термин составные, имея ввиду что отдельные элементы таких конструкций могут состоять из разных материалов, но каждый элемент является однородным [1]. Однако нет ясности и в отношении термина «композитный материал». Одни ученые считают, что композитный материал – это любой материал со сложной устойчивой внутренней структурой, внутри которой присутствуют разные однородные материалы. Другие же полагают, композитный материал – это принципиально рукотворный материал, т.е. задуманный и созданный людьми. А естественные материалы уже композитами не являются. Таким образом, с точки зрения первых дерево – это композит, с точки зрения вторых – нет.

Авторская точка зрения на эти проблемы состоит в том, что следует в первую очередь задуматься: а почему композитные конструкции своими свойствами во многом превосходят однородные? Очевидно положительные свойства возникают в результате взаимодействия материалов с разными свойствами между собой. Если бы это был один и тот же материал, то свойства всей конструкции ухудшились бы по сравнению с композитным случаем, как мы это знаем из многих примеров. Очевидно, что это взаимодействие должно быть достаточно полным, чтобы возник положительный эффект. Поэтому композитной конструкцией следует считать конструкцию, состоящую из разных материалов, которые достаточно тесно взаимодействуют между собой.

В соответствии с данным определением взаимодействия материалов с отличающимися свойствами не может не порождать сложное напряженное состояние, которое существенно сложнее напряженных состояний в однородных конструкциях. Например, в стержневых однородных конструкциях все расчеты ведутся из предположения об одноосном напряженном состоянии в каждой точке конструкции. В композитных конструкциях такое предположение является неуместным, т.к. это равносильно предположению, что все материалы такой конструкции ведут себя каждый по себе, без взаимодействия [2], [3].

Наличие сложного напряженного состояния в каждой точке композитной конструкции приводят к тому что для таких конструкций отсутствуют аналитические решения соответствующих краевых задач, и все решения приходится получать численно. Но численные решения не поддаются проверке без наличия аналитического решения хотя бы для некоторых случаев. Поэтому одна из главнейших задач композитных конструкций - это разработка методов получения аналитических или полуаналитических решений. Полуаналитические решения, это когда трехмерная задача сводится к двумерной, которая в свою очередь решается численно.

В последние годы был разработан метод асимптотического расщепления композитных конструкций, который оказался эффективным инструментом и теоретического исследования проблем композитных конструкций и практического решения конкретных задач [2], [3]. Основная идея метода состоит в том, что решение пространственной задачи теории упругости ищется в виде конечных сумм степеней дифференциальных операторов, коэффициенты которых зависят от переменных, лежащих в плоскости поперечного сечения. Дальнейшая разработка этого метода позволит в какой-то степени решить обозначенную задачу.

Применение метода асимптотического расщепления позволило установить важнейший теоретический результат о в общем случае недостаточности использования гео-

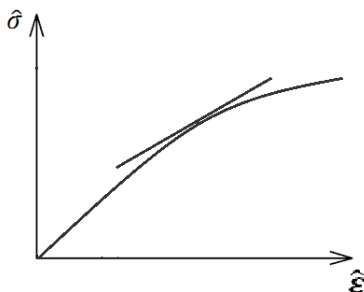


Рис. 1.

метрически линейных моделей тел, основанных на соотношениях Коши для тензора деформации [4]. Необходимость использовать геометрически нелинейную теорию возникает в окрестностях некоторых особых точек конструкции, которых имеется, как правило, небольшое конечное число. Но эта необходимость принципиальна, т.е. даже для самых малых нагрузок, действующих на конструкцию, в окрестностях особых точек использование геометрически линейной теории приводит к бесконечно большим напряжениям.

При расчете композитных конструкций некоторые материалы в рабочем состоянии ведут себя физически линейно (сталь, углепластик), а некоторые принципиально физически нелинейно (бетон, дерево). Это порождает еще одну важнейшую проблему, умение моделировать нелинейное поведение материалов удобным образом. Удобным - в смысле возможности получать аналитические решения хотя бы в некоторых простейших случаях. Дело в том, что традиционный подход представляет уравнения состояния нелинейного упругого материала как нелинейное отображение 6-мерного пространства тензора деформации $\hat{\varepsilon}$ в 6-мерное пространство $\hat{\sigma}$ (рис.1), [1]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\phi\psi}(\hat{\varepsilon}) \varepsilon_{\phi\psi}. \quad (1)$$

При таком подходе не удается получить аналитическое решение ни одной задачи, кроме тривиальной задачи о расширения-сжатия однородного стержня. Кроме того, данный подход упраздняет понятие изотропного материала, так все нелинейные материалы автоматически приобретают свойство анизотропии.

В настоящее время предложен альтернативный подход, когда уравнения состояния записываются как отображение расслоения 6-мерного многообразия в 6-мерное касательное пространство (рис.1), [5]:

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\phi\psi}(\hat{\varepsilon}) \dot{\varepsilon}_{\phi\psi}, \quad (2)$$

где точкой обозначена производная по времени, причем под временем достаточно понимать параметр, характеризующий процесс нарастания нагрузки. Предложенная модель получила название - модель локально линейно упругого тела, ее простейший вариант - это модель изотропного локально линейно упругого тела:

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta} = \lambda \dot{\theta} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где константы являются функциями второго инварианта девиатора тензора напряжения S_2^D и первого инварианта тензора деформации θ :

$$\mu = \mu(S_2^D), K = K(\theta). \quad (4)$$

Использование данной модели позволило получить аналитическое решение задачи о сжатии трубобетонной стойки в пространственной постановке [5]. Данная конструкция является композитной нелинейной конструкцией, поэтому получение такого аналитического решения с помощью предложенной модели локального линейно упругого тела является уникальным и представляет собой существенный вклад в общую теорию расчета композитных нелинейных конструкций.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-47-860015.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов: учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2015. – 375 с.
2. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. – Новосибирск: Наука, 2004. – 408 с.
3. Горынин Г.Л. Пространственные задачи слоистых анизотропных конструкций: монография. – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 262 с.
4. Горынин Г.Л., Власко А.Ф. Исследование кромочного пограничного слоя в трехмерном стержне при растяжении // Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады 4-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 11-13 апреля 2017г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 74–79.
5. Горынин Г. Л., Снигирева В. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния трубобетонных конструкций с учетом нелинейного поведения бетона // Известия высших учебных заведений. Строительство. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. № 4(700). С. 17-29.

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБРИДНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю. В.

г. Новосибирск

Для гибридных слоистых круглых и кольцевых пластин при различных условиях нагружения и закрепления разработаны метод определения предельно приемлемых жесткостей, первой (предельно упругой) и второй (нагрузка предразрушения) предельных нагрузок. Определены критерии их достижения, получены необходимые системы разрешающих уравнений и метод их решения.

Ключевые слова: Гибридные слоистые кольцевые пластины, жесткость, несущая способность, предразрушение.

LIMIT CONDITION OF HYBRID RING PLATES

Nemirovsky Yu. V.

Novosibirsk

For hybrid layered round and ring plates under various loading and securing conditions, a method for determining the maximum acceptable stiffness, the first (extremely elastic) and the second (pre-fracture load) ultimate loads, was developed. The criteria for their achievement are determined, the necessary systems of solving equations and the method of their solution are obtained.

Keywords: Hybrid layered ring plates, rigidity, bearing capacity, prefracture.

Кольцевые пластины широко используются в различных отраслях машиностроения, судостроительной и авиационной технике, на предприятиях нефтегазового комплекса и строительной индустрии. Традиционные расчеты предельно приемлемой жесткости деформирования и несущей способности при эксплуатации выполняются на основе моделей упругих сред или модели идеальных жестко-пластических материалов по схеме А.А. Гвоздева. Эти модели давно показывают невозможность выполнения всё возрастающих экономических и эксплуатационных требований при использовании конструкций из однородных материалов. В настоящее время разработано множество эффективных и надежных методов (склейка, различные типы сварок, плазменного и холодного газодинамического напыления и др.), позволяющих создавать различные гибридные конструкции из практически любых наборов материалов. Разрабатываемые в настоящее время методы исследования деформирования и оценки несущей способности таких композитных конструкций основываются на моделях упругих сред и не позволяют надежно и адекватно оценивать их реальное поведение. Дело в том, что от вновь создаваемых материалов требуют существенного увеличения прочности и пластических характеристик. Это приводит к существенно иным перераспределениям полей напряжений и деформаций в гибридных конструкциях, чем это предсказывают упругие расчеты. В предлагаемой работе разработан новый подход к расчету и анализу предельных состояний кольцевых гибридных пластин, позволяющий с единых позиций анализировать два принципиально разных предельных состояния: первое – предельно-упругое, когда во всех из составляющих материала не будет превышен предел упругости и второе предельное состояние (состояние предразрушения) когда все материалы или некоторые из них деформируются пластически, но ни один из них не разрушается. Построены системы разрешающих уравнений, сформированы критерии определения первого и второго предельных состояний. Описан метод определения соответствующих предельных нагрузок.

Основные уравнения динамического и квазистатического деформирования при неупругом изгибе гибридных композитных n -слойных пластин симметричного строения [1] в полярной системе координат при осесимметричном изгибе будут иметь вид [1,2]:

$$\varepsilon_r = -zx_r, \quad \varepsilon_\Theta = -zx_\Theta, \quad x_r = \frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$x_\Theta = \frac{1}{x} \frac{dw}{dx}, \quad \varepsilon_u = |z| x_u, \quad x_u^2 = (x_r^2 + x_\Theta^2 + x_\Theta^2) \quad (1)$$

$$\sigma_{rj} = \frac{\$j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \left(\varepsilon_r + \frac{1}{2} \varepsilon_\Theta \right), \quad \sigma_{\Theta j} = \frac{\$j(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \left(\varepsilon_\Theta + \frac{1}{2} \varepsilon_r \right) \quad (2)$$

$$M_r = 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{rj} z dz, \quad M_\Theta = 2 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_{\Theta j} z dz \quad (3)$$

Здесь $w, z, h_j, \sigma_{rj}, \sigma_{\Theta j}, M_r, M_\Theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\Theta, \varepsilon_u$ - безразмерные прогиб, границы разделения слоев, радиальные и окружные напряжения, моменты, деформации и интенсивность деформаций, $x = \frac{r}{R}$ - безразмерная радиальная координата, z - поперечная координата. Уравнение равновесия изгибаемой кольцевой пластинки с безразмерным радиусом x_0 внутреннего отверстия имеет вид:

$$\frac{d}{dx} (xM_r) - M_\Theta = xQ \quad (4)$$

$$xQ = x_0Q_0 - q_0\Psi(x), \quad \Psi(x) = \int_{x_0}^x \phi(x) x dx$$

$Q, q_0, \phi(x)$ - безразмерные перерезающая сила, амплитуда и функция расширенной поперечной нагрузки.

Далее для конкретизации и сокращения записей формул рассмотрим трехслойный конструкции из двух материалов с внутренним слоем $2\Delta_1$ и наружным слоем толщиной Δ_2 и будем использовать для аппроксимирующих функций деформирования однотипные зависимости

$$\sigma_j(\varepsilon_u) = A_{1j}\varepsilon_u + A_{2j}\varepsilon_u^3, \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

Здесь A_j - безразмерные модули упругости, σ_{0j}, σ_j^* - безразмерные пределы текучести, $\varepsilon_{0j}, \varepsilon_j^*$ - предельно упругие деформации и деформации предразрушения [3].

$$\varepsilon_{0j} = \frac{\sigma_{0j}}{A_{1j}}, \quad \varepsilon_j^* = \frac{3\sigma_j^*}{2A_{1j}}, \quad A_{2j} = -\frac{A_{1j}}{3(\varepsilon_j^*)^2}$$

Тогда для моментов M_r, M_Θ получим выражения:

$$M_r = D_1 R_1(w) + D_2 R_2(w), \quad M_\Theta = D_1 R_3(w) + D_4 R_4(w) \quad (6)$$

$$D_1 = \frac{A_{11}\Delta_1^3}{3} \left[1 - \frac{A_{21}}{A_{11}} + \frac{A_{21}}{A_{11}} \left(1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^3 \right], \quad (7)$$

$$D_2 = \frac{A_{21}\Delta_1^5}{5} \left[1 - \frac{A_{22}}{A_{21}} + \frac{A_{22}}{A_{21}} \left(1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^5 \right]$$

$$R_1(w) = (2\kappa_r + \kappa_\Theta), \quad R_2(w) = (2\kappa_r + \kappa_\Theta) \kappa_u^2, \quad R_3(w) = (2\kappa_\Theta + \kappa_r), \quad R_4(w) = (2\kappa_\Theta + \kappa_r) \kappa_u^2 \quad (8)$$

$$\kappa_u^2 = \kappa_r^2 + \kappa_r \kappa_\Theta + \kappa_\Theta^2$$

Из (4) получим уравнение для $w(x)$

$$\frac{d}{dx} [x(D_1 R_1(w) + D_2 R_2(w))] - D_1 R_3(w) - D_4 R_4(w) = xQ(x) \quad (9)$$

Граничные условия для уравнения (9) формулируются таким образом:

1. Оба контура заземлены:

$$w(x_0) = \Psi(x_0) = w(1) = 0, \quad \Psi = \frac{dw}{dx} \quad (10)$$

2. Внутренний край заземлен, наружный – шарнирно оперт

$$w(x_0) = w(1) = 0, \quad \left(2\frac{d\Psi}{dx} + \frac{\Psi}{x}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \Psi(1) = 0 \quad (11)$$

3. Сплошная заземленная пластинка ($x_0 = 0$)

$$\Psi(0) = \Psi(1) = 0, \quad w(1) = 0 \quad (12)$$

4. Сплошная шарнирно опертая пластинка

$$w(1) = 0, \quad \Psi(0) = 0, \quad \left(2\frac{d\Psi}{dx} + \frac{\Psi}{x}\right)_{x=1} = 0 \quad (13)$$

5. Заземленная пластинка с жесткой шайбой, соединенной жестко

$$w(1) = 0, \quad \Psi(x_0) = \Psi(1) = 0 \quad (14)$$

Приближенное решение будем искать методом Бубнова-Галёркина [4] в форме

$$w(x) = C \left(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3\right) \quad (15)$$

из граничных условий. Тогда для сплошной заземленной пластинки будем иметь

$$w(x) = C \left(1 - 3x^2 + 2x^3\right), \quad \Psi(x) = 6Cx(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (16)$$

Для сплошной шарнирно-опертой пластинки

$$w(x) = C \left(1 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{2}x^3\right), \quad \Psi(x) = 2C \left(x^2 - \frac{5}{3}x\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (17)$$

Константу C будем определять с помощью стандартной процедуры Бубнова-Галёркина [4]. Получим в результате её зависимость от амплитуды распределенной нагрузки $C = \frac{\gamma}{3}(q_0)$ и затем с помощью выражений (1), (16), (17) определим $\max_{x_0 \leq x \leq 1} \kappa_u^2(x_1q_0)$. Первая q_0^0 и вторая q_*^0 амплитуды предельных нагрузок определяются из равенств:

$$\max_{x_0 \leq x \leq 1} \kappa_u^2 = \varepsilon_0^0, \quad \max_{x_0 \leq x \leq 1} \kappa_u = \varepsilon^* \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_0^0 = \min_j \left(\varepsilon_j^0\right), \quad \varepsilon^* = \min_j \left(\varepsilon_j^*\right) \quad (19)$$

При необходимости уточнения полученных характеристик вместо формулы (15) для прогиба можно использовать формулу

$$w(x) = \sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa} \left(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3\right)^{\kappa} \quad (20)$$

получить с помощью процедуры Бубнова-Галёркина соответствующую систему алгебраических уравнений для коэффициентов C_{κ} и затем повторить вышеописанную процедуру

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ №19-01-00038

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В. Динамика пластических гибридных слоисто-волоконистых пластин. X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (18-22 сентября 2017, г. Самара, Россия), СамГТУ, 2017
2. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций, Новосибирск, Наука, 1990, 90с.
3. Немировский Ю.В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов. Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Материалы II Международной конференции, Казань, Казанский ГУ, 2009.
4. К. Флетчер Численные методы на основе метода Галёркина (перевод с английского) М., Мир, 1988, 352 с.

NUMERICAL MODELING OF THE COMPOSITE STRUCTURE OF PNEUMATIC TIRES USING ISOGEOMETRIC ANALYSIS

Israfilova A. I.^{1,2}, Kutrunov V. N.¹

¹ *Institute of Mathematics and Computer Sciences, University of Tyumen,
a.i.israfilova@utmn.ru*

² *Institute for Structural Analysis, Technische Universität Dresden, Germany*

Keywords: Isogeometric Analysis, Finite Element Analysis, NURBS, Conic Sections, Steady State Rolling.

Car tires which people use nowadays underwent great changes to evolve from the first wheel's cover made from leather to the Thompson's air-tube and, finally, to become a complex fabric, steel and rubber composite. Moreover, the geometry of the cross-section is constantly developed and optimized in order to meet the challenges of civil and industrial application. As a consequence, the structure of any modern tire is non-linear from geometrical and mechanical points of view.

Tire industry has been using the Finite Element Analysis (FEA) as an important part in the workflow of the design and study of tires. Robustness and accuracy of the numerical simulations are rapidly increasing with different techniques for the proper characterization of the inelastic material behaviour. However, after many years this method still has its drawbacks regarding geometry approximation: the construction of the mesh can be costly, time-consuming and it causes replacing curves with straight lines. The incompleteness of FEA encouraged the scientific community to search for the alternative.

The Isogeometric Analysis (IGA), as an application of the Computer Aided Design (CAD) technology in the computational point of view, sets sights on describing the geometry as well as on defining all field variables in terms of the Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) [1]. Nowadays, this method is gaining popularity in all the possible engineering fields of expertise: civil engineering [2, 3], mechanical engineering [4-5], even medicine and bioengineering [6-7].

Since the application of NURBS gives engineers and scientists a powerful tool to describe a non-linear geometry, IGA becomes an attractive way to model and analyse bodies and car tires in particular. One of the first attempts to apply IGA in car tire modelling is Garcia and Kaliske [5]. They proved the efficiency of the method by comparing simulation results to those obtained by FEA for the same geometry.

One of the biggest advantages of IGA is the ability to obtain geometry from CAD-editors. Realistic models of tires with the representation of the composite structure of the layers in the cross-section and detailed description of the tread pattern can be created using advanced CAD-tools and directly transferred to the numerical environment. Thus, the robustness of the analysis is increased due to the fact that the geometry is not approximated during the transition from the stage of graphic design to the structural analysis, the accuracy of representing the bodies in the computational environment is equal to the accuracy of creating the drawing of the body.

Graphical editors, however, are not yet convenient enough while the whole volumes, i.e. solid elements of complex shape, are created. An independent apparatus for particular requirements of the tire industry could improve the model assembling process. In order to describe the circular shape of a tire in the circumferential direction, a mathematical framework was developed based on the definition of NURBS. The obtained formulation allows computation of the control polygon of the model. Different combinations of the input parameters are possible. Furthermore, the main advantage of the presented algorithm is the possibility to extend the formulation and obtain any general conic section, i.e. a hyperbola, a parabola, and an ellipse. This latter fact makes the scheme useful not only in case of tire modeling but also for other engineering fields.

Special attention in discussing the shortcomings of the FEA should be paid to contact problems and problems of the mechanics of composite bodies. If the boundaries of phases or contacting elements are given as piecewise straight lines, gaps, mutual intersections, which are not present in reality, are often observed in the created model. Such geometry violations can be crucial, for instance, in the simulations of the mounting process. As a result, contact analysis in IGA is another field of research which is rapidly developed today [8]. Garcia and Kaliske performed results of the velocity based frictional contact analysis of the steady-state rolling tire [5]. Approximation of the variable field by continuous NURBS allows one to estimate the tire-road contact pressure without the influence of the discontinuities on elements' borders. Basis functions, which are defined along the whole contact region, do not give pressure oscillations on the border of the contact region as found for polynomials [9].

In this contribution, IGA models of tires are presented in order to demonstrate the convenience of the CAD-IGA scheme. Moreover, the results of the numerical simulations for rolling tires using IGA are reported. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation is used to describe the rolling phenomenon at steady state. In this formulation, the reference frame is neither attached to the material particles nor fixed in space. While there are many advantages of this type of formulation, particularly with respect to computational time, the treatment of contact formulation requires special attention. The flexibility of these models for mesh refining while keeping the exact geometry is highlighted. Important remarks and a discussion on the results obtained close this presentation.

REFERENCES

1. Hughes, T. J. R., Cottrell, J.A., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. No 194. Pp. 4135–4195.
2. Bauer, A.M., Breitenberger, M., Philipp, B., Wüchner, J.A., Bletzinger, K.U. Embedded structural entities in NURBS-based Isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. No 325. Pp. 198–218.

3. Thai, S., Thai, H.T., Vo, T., Reddy, J.N. Post-buckling of functionally graded microplates under mechanical thermal loads using Isogeometric analysis. *Engineering Structures*. 2017. No 150. Pp. 905–917.
4. Bontinck, Z., Corno, J., Schöps, S., De Gersem, H. Isogeometric analysis harmonic stator-rotor coupling for simulating electric machines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. No 334. Pp. 40–55.
5. Garcia, M. A., Kaliske, M. On isogeometric analysis for tire simulation at steady state rolling. In 36th Annual Meeting Conference on Tire Science and Technology. Akron, Ohio, 2017.
6. Zhang, Y., Bazilevs, Y., Goswami, S., Bajaj, C.L., Hughes, T.J. Patient-Specific Vascular NURBS Modeling for Isogeometric Analysis of Blood Flow. *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. Pp. 73–92.
7. Bazilevs, Y., Takizawa, K., Tezduyar, T.E. Biomedical fluid mechanics and fluid-structure interaction. *Computational Mechanics*. 2014. No 54. Pp. 893–893.
8. Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T.J.R. Contact treatment in Isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2011. No 200. Pp. 1100–1112.
9. Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T.J.R. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in Isogeometric analysis with NURBS. ICES REPORT 11-16. The University of Texas at Austin, 2011.

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТА НА ОСНОВЕ ЦЕМЕНТНОГО КАМНЯ И МИНЕРАЛЬНО-ОРГАНИЧЕСКОГО НАПОЛНИТЕЛЯ

Прищепа И. А., Горленко Н. П., Саркисов Ю. С.

г. Томск

Приведены экспериментальные данные механических свойств композита на основе неметаллической матрицы цементного камня и дисперсного минерал-органического наполнителя на основе термомодифицированного торфа. Показано, что введение 0,5 масс. % химической добавки приводит к упрочнению композиции при сжатии в 28-суточном сроке твердения на 54,2 %, контракции цементного теста на 51,2 %. Методами рентгенофазового анализа и спектроскопии выявлено, что наблюдаемые эффекты являются результатом взаимодействия компонентов матрицы и наполнителя.

Ключевые слова: композиты, прочность при сжатии, контракция, цементный камень, торф.

MECHANICAL PROPERTIES OF THE COMPOSITE ON THE BASIS OF THE CEMENT STONE AND MINERAL-ORGANIC FILLER

Prishchepa I. A., Gorlenko N. P., Sarkisov Yu. S.

Tomsk

Experimental data of mechanical properties of a composite on the basis of a nonmetallic matrix of a cement stone and disperse mineral-organic filler on the basis of the thermo-modified peat are given. It is shown, that introduction of 0.5 mas. % of chemical additive leads to hardening of composition at compression in the 28-day term of curing for 54.2%, a counteraction of the cement test for 51.2%. By methods of the X-ray phase analysis and

spectroscopy it is revealed that observed effects are result of interaction of components of a matrix and filler.

Keywords: composites, durability at compression, a counteraction, a cement stone, peat.

Исследование механических свойств композиционных неметаллических материалов с введением в матрицу нульмерных дисперсных наполнителей небольшой концентрации является актуальной задачей как с теоретической, так и практической точки зрения. Это обусловлено тем, что свойства композитов зависят не только от физико-механических свойств вводимых компонентов, но и уровня их взаимодействия с компонентами матрицы. Наиболее ярко эффект взаимодействия проявляется в матрицах на основе цементного камня, так как процесс формирования такого композиционного материала протекает в течение длительного времени не только в условиях твердотельного, но и в условиях вязко-текучего состояния.

Цель работы заключалась в исследовании механических и физических свойств композита на основе цементного камня с введением в его состав дисперсного минерал-органического наполнителя.

Термомодифицированный торф (ТМТ600) [1] в концентрации 0,5 масс. % вводили в цементное тесто нормальной густоты и определяли прочность при сжатии цементного камня в различные сроки твердения и контракцию цементного теста.

Определение предела прочности при сжатии проводилось на образцах-кубиках с размером ребра куба $(2,0 \times 2,0 \times 2,0) \times 10^{-2}$ м. Контракцию цементного теста проводили с использованием прибора «цемент прогноз-2». Для выявления физико-химических взаимодействий в матрице цементного камня применяли рентгенофазовый анализ (ДРОН-3 с гониометром ГУР-8 и медным антикатодом).

В табл. 1 приведены результаты прочности образцов при сжатии в различные сроки твердения.

Таблица 1

Влияние термомодифицированной торфяной добавки ТМТ600 на прочность цементного камня

Цементный камень	ТМТ600, %	Нормальная густота, %	Кинетика набора прочности цементного камня, МПа		
			1 сутки	14 суток	28 суток
Контрольный образец	-	26,0	14,6	30,9	32,3
С добавкой ТМТ600	0,5	25,5	16,6	38,8	49,8

Как видно из табл. 1, в 1, 14, 28 суточном возрасте прочность на сжатие исследуемых образцов превосходят контрольные соответственно на 13,7; 25,6; 54,2%.

На рис. 1 приведены кинетические кривые контракции цементного теста.

Как следует из рис. 1, величина контракции с термомодифицированной добавкой увеличивается на 51,7% что, несомненно, является результатом взаимодействия компонентов композита.

Для выявления возможных физико-химических взаимодействий компонентов в матрице композита проведены рентгенофазовый (рис.2) и ИК- спектроскопический (рис. 3) методы анализа.

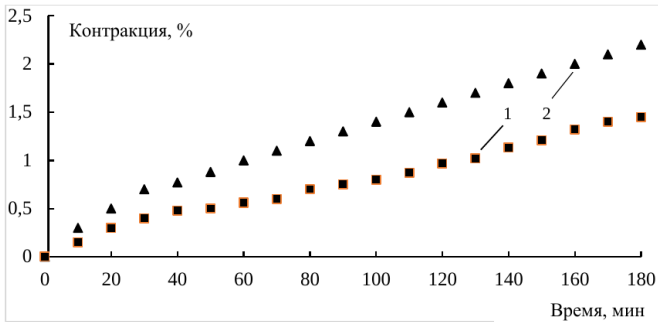


Рис. 1. Контракция цементного теста: 1 – контрольный образец, 2 – композит с добавкой TMT600

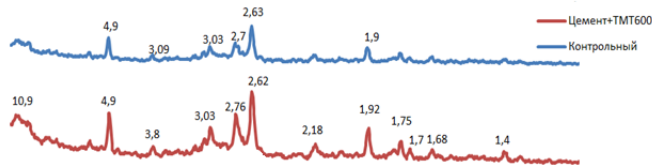


Рис. 2. Результаты рентгенофазового анализа цементного камня и цементного камня с добавкой TMT600

Как следует из рис. 2, с введением добавок в гидратированном цементе идентифицируются дополнительные пики слабозакристаллизованными гидросиликатами кальция CSH – d, Å = 2,76; 2,62; закристаллизованными портландитом $\text{Ca}(\text{OH})_2$ – d, Å = 2,63; 1,93; 4,91; гидросиликат кальция (тоберморит) $5\text{CaO} \times 6\text{SiO}_2 \times 5\text{H}_2\text{O}$ – d, Å = 11,28; 10,9, а также негидратированными минералами портландцементного клинкера C_3S (алит) – d, Å = 3,03; 3,06; 2,74; β - C_2S (белит) – d, Å = 3,09; 3,03; 1,75; 2,18. В результате анализа образцов цементного камня с добавками установлено, что интенсивность основного пика (4,474 Å и 3,56 Å), характерного для портландита, а также пики тоберморита выше по сравнению с контрольным образцом, что указывает на повышение степени гидратации портландцемента. На наш взгляд, формирование дополнительного количества низкоосновных гидросиликатов кальция обусловлено связыванием оксидов кальция с функциональными группами минерал-органических комплексов, присутствующих в добавке TMT600, что приводит к повышению прочности композита.

Из анализа ИК-спектров следует, что в матрице композиционного материала наблюдаются сильные взаимодействия между ее отдельными компонентами. На это указы-

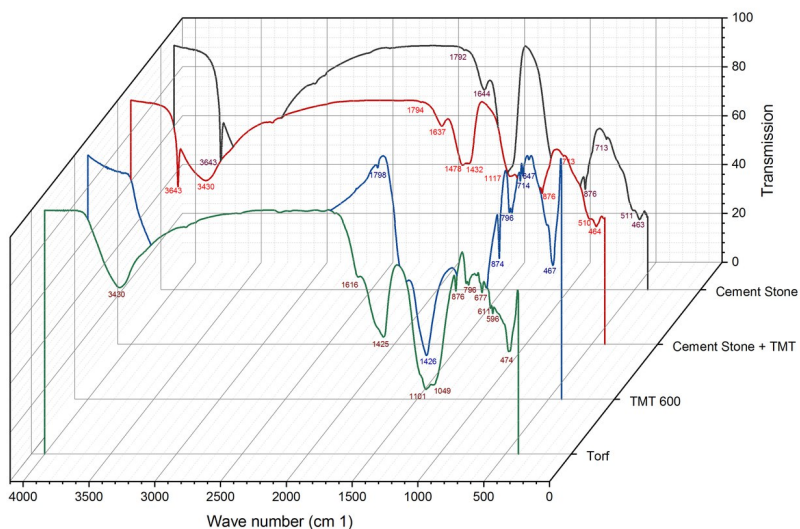


Рис. 3. ИК-спектры образцов: 1 – цементный камень, 2 – композит с добавкой ТМТ600, 3 – добавка ТМТ600, 4 – исходный торф

вают существенные отличия пиков поглощения в области длин волн $(1500-400) \text{ см}^{-1}$ для отдельных компонентов и композита в целом.

Таким образом показано, что взаимодействие компонентов термомодифицированной добавки в матрице цементного камня приводит к существенным изменениям механических свойств композита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков Н.А., Саркисов Ю.С., Горленко Н.П., Прищепа И.А., Зубкова О.А. Структурообразование цементного камня с добавкой термомодифицированного торфа // Изв. ВУЗов. Строительство, 2018. № 12. С. 52-58.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ВЫСОКОМОДУЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ ВОЛОКОН

Михеев П. В., Мостовой Г. Е., Конюшенков А. А.

2. Москва

При статическом растяжении современных высокопрочных волокон наблюдается зависимость модуля упругости от базы измерения. Авторы объясняют наблюдаемый эффект влиянием деформации волокон в зажимах испытательной машины и предлагают простую модель для учета поправок. На примере углеродных волокон ВПР-19 показано качественное совпадение данных, полученных разными методами – статическим растяжением с учетом поправки, по модулю композита обратным расчетом и путем измерения скорости звука в волокне.

Полученные результаты могут применены к любым волокнам и комплексным нитям с высоким модулем упругости от 70 до 600 ГПа.

Ключевые слова: углеродные волокна, модуль упругости, деформация при растяжении, скорость звука.

METHODICAL FEATURES OF DEFINITION OF THE MODULE OF ELASTICITY OF HIGH-MODULAR CARBON FIBRES

Mikheyev P. V., Mostovoy G. E., Konyushenkov A. A.

Moscow

At static stretching of modern high-strength fibers the dependence of the module of elasticity on base of measurement is observed. Authors explain observed effect with the impact of deformation of fibers in clips of the testing equipment and offer simple model for accounting of amendments.

On the example of carbon VPR-19 fibers high-quality coincidence of the data obtained by different methods – static stretching taking into account the amendment, on the composite module by the return calculation and by measurement of acoustic speed in fiber is shown.

The received results can be applied to any fibers and complex threads with the high module of elasticity from 70 to 600 GPa.

Keywords: carbon fibers, the elasticity module, deformation at stretching, acoustic speed.

Внедрение в промышленность композиционных материалов современных высокопрочных требует измерения не только их прочности, но и модуля упругости, так как зачастую композитное изделие должно сохранять геометрические размеры в заданном диапазоне нагрузок. Однако при исследовании волокон или комплексных нитей практически невозможно использовать механические и даже оптические экстензометры для измерения деформаций волокна под нагрузкой. И остается единственный способ измерения по перемещению захватов [1] Однако этот метод был хорош для естественных или для обычных полимерных волокон. При его применении к конструкционным волокнам с модулем выше 70 ГПа (углеродным, стеклянным, или арамидным) стал наблюдаться рост измеренного модуля упругости при увеличении базы испытаний (длины волокна). С точки зрения материаловедения этот результат лишен физического смысла.

Однако для расчета свойств материала необходимо знать свойства волокон [2].

Другим распространенным методом измерения модуля упругости волокон является метод измерения скорости звука в нем (динамический метод). И при большой базе статический и динамический модули, становились близки.

В данной работе сопоставлены значения модуля упругости волокон ВПР-19С, полученные различными методами и применяемыми при изготовлении тормозных

дисков[10]. Можно определить модуль упругости прямым методом по диаграммам деформирования при квазистатическом растяжении моноволокон (по перемещению захватов), а можно косвенными методами, определяя динамический модуль упругости по скорости прохождения звука, по модулю упругости углепластика при растяжении или по предельной деформации и по прочности, измеренными отдельно. При определении модуля упругости высокопрочных и высокомодульных волокон рекомендуют использовать волокна большой длины 300-500 мм, однако в случае, волокон ВПР-19С это условие трудновыполнимо в силу особенностей технологии его изготовления. Волокно ВПР-19С проходить высокотемпературную термообработку в спутанном виде и получить неповрежденные волокна большой длины технически трудно.

Поэтому было проведено испытание моноволокон длиной 10 мм и 20мм при растяжении. Согласно использованной методике МИ 4807-29-86 моноволокна (производство ЧЭЗ, термообработаны при высокой температуре в НИИГрафит) заклеивались в бумажные рамки[5], а затем испытывались на растяжение на разрывной машине "Инстрон" со скоростью перемещения захватов 5 мм/мин. Запись деформации производилась по перемещению захватов. Некоторые авторы [3] пытаются мерить модуль путем нанесения меток на отдельные волокна но такая методика очень сложна.

В Таблице 1 приведены значения модуля упругости E_f и прочности σ , полученные в этих опытах. При обработке данных использованы методы работы [7] Представленные в Табл.1 значения модуля упругости значительно отличаются от существующих в литературе значений модуля упругости E_f высокомодульных ПАН-волокон[6,8]. По данным их модуль упругости высокомодульных волокон после термообработки около 450 ГПа.

Таблица 1

Значения модуля волокон при различной базе

	Длина воло- на, L , мм	Диа- метр воло- на D , мм	Кoeffи- циент вариации диаметра Vd , %	Модуль упруго- сти E_f , ГПа	Кoeffи- циент вариации модуля упруго- сти Ve , %	Средняя проч- ность σ , ГПа	Кoeffи- циент вари- ации $V\sigma$, %
1	10	7,1	5,8	285	11	1,57	34
2	20	7,3	7,9	387	12	1,17	38
3	50	7,6	3,9	439	10	1,22	46

Из данных Табл.1. следует, что модуль упругости увеличивается при увеличении длины волокна, что не имеет физического объяснения.

Можно оценить границы величины модуля упругости, зная прочность волокон, если вычислить предельную деформацию. Её можно измерить, пользуясь её малостью.

Оценка предельной деформации ϵ_m , производилась путем изгиба волокон на цилиндрах различного радиуса (использовались сверла) с визуальным определением момента разрушения. Деформации ϵ_m внешней стороны волокон дается следующей Формулой (1)

$$\epsilon_f = R_f/R_0 \quad (1)$$

где R_f - радиус волокна, R_0 – радиус оправки

При радиусе изгиба 2 мм начали разрушаться отдельные волокна жгута, а при радиусе изгиба 0.7 мм все волокна разрушаются, согласно(1)предельная деформация волокон ϵ_m от 0,17 до 0,5 %. При радиусе волокон 6 мкм и средней прочности 1,2 ГПа, модуль упругости от 310 ГПа до 900 ГПа, что отличается от модуля упругости в Табл. 1.

Модуль упругости жгута E_f можно определить также по скорости прохождения в нем ультразвуковой волны, согласно формуле[10]:

$$E_f = C^2 \rho, \quad (2)$$

где C -скорость звука в волокне; ρ – плотность волокон

Для проведения этих опытов жгут волокон ВПР-19С длиной распрямлялся, а торцы его заливались эпоксидной смолой. После этого была определена скорость прохождения ультразвукового импульса как в работе [4]. Согласно этим опытам модуль упругости 520-540 ГПа. Эти данные также отличаются от данных рассчитанных по диаграммам растяжения.

Еще одним косвенным методом определения E_f является определение модуля упругости углепластика E_{pl} , изготовленного из этих волокон, согласно формуле[11]:

$$E_f = E_{pl}/V_f \quad (3)$$

где V_f -объемная доля волокон в пластике.

Для этого были изготовлены образцы углепластика на основе эпоксидного связующего ЭДП, с долей волокон 60%, размером 1 x 5 x 120 мм. Модуль пластика 200 ГПа определялся с помощью навесного экстензометра при растяжении и, следовательно, модуль упругости волокон не менее 300 ГПа. В силу трудности распрямления волокон ВПР-19С, велика вероятность их искривления в пластике, и полученное значение модуля волокон в пластике, вероятно, ниже истинного.

Согласно представленным данным существует заметное расхождение в значениях E_f , полученных прямым методом при растяжении, и полученных косвенными методами, что заставило нас проанализировать особенности растяжения высокомодульных волокон.

Рассмотрим как передается нагрузка от силовозбуждающего устройства разрывной машины к образцу. Между захватами машины и волокном существует клеевая прослойка(заклейка). На рис.1 схематически показан разрез волокна и заклейки.

Нагрузка сначала передается слою клея в котором возникают сдвиговые напряжения, а затем уже волокну. Справедливо предположить, что испытаниях на растяжение прослойка клея деформируется линейно-упруго так как, полученные диаграммы растяжения линейны. Модуль упругости клея при сдвиге неизвестен, но он постоянен во всех опытах, так как постоянны длина заклейки и температура испытаний. В рассматриваемых нами опытах единственной переменной величиной является жесткость волокна.

Мы будем рассматривать волокно, заклеенное для проведения испытаний как систему двух упругих пружин(Рис.2) . Длина одной из них изменяется при изменении длины волокна.

Изменяемое по перемещению захватов расстояние Δ будет иметь две составляющих: деформацию волокна и деформацию заклейки, и будет определяться следующей формулой:

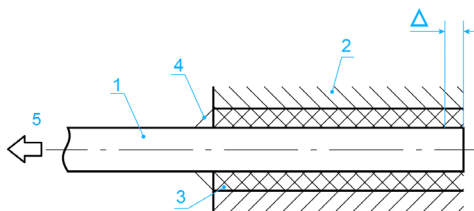


Рис. 1. Схема закрепления волокна при испытаниях. 1 – волокно; 2 – захваты испытательной машины; 3 – промежуточный слой клея; 4 – деформация заклейки при растяжении; 5 – приложенная сила

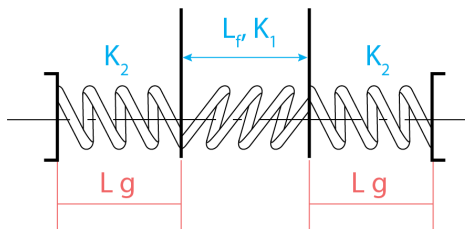


Рис. 2. Эквивалентная упругая модель волокна при испытании L_g – длина заклейки; L_f – длина волокна

$$\Delta = PL_f/E_f S_f + PK_2 \quad (4)$$

где K_2 – жесткость заклейки; P – сила, прикладываемая к волокну.

Однако при определении модуля упругости по перемещению захватов деформация определяется именно как перемещение захватов.

На основании формулы (5) Можно связать истинный модуль упругости волокна E_f и измеряемый модуль упругости E_f^{exp} следующей формулой:

$$1/E_f^{exp} = 1/E_f + K_2 S/L_f \quad (5)$$

Обратная величина модуля упругости E_f^{exp} линейно связана с отношением площади поперечного сечения волокна к его длине S/L_f .

На Рис.3. представлена зависимость, построенная по результатам испытаний моноволокон длиной 10 мм и 20 мм / тех же самым данным, 100 экспериментальных точек обработаны по методу наименьших квадратов. Коэффициент корреляции между $1/E_f^{exp}$ и $1/L_f$, определяемый по всем образцам $=0,53$, значение критерия Стьюдента 6,18. Модуль упругости, определяемый на основании Рис.3 с учетом формулы (5) $E_f = 640$ ГПа.

Рисунок 3 Зависимость обратного модуля упругости. Определенного по перемещению захватов от обратной длины волокна

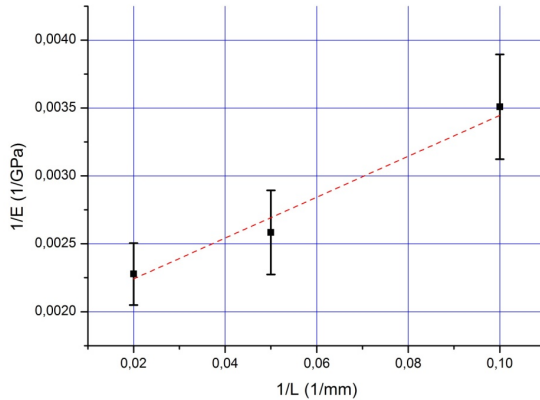


Рис. 3. Зависимость обратного модуля упругости. Определенного по перемещению захватов от обратной длины волокна

Таблица 2

Оценка модуля упругости различными методами

	Метод измерения модуля упругости	Нижняя граница модуля упругости, ГПа	Верхняя граница модуля упругости, ГПа
1	По изгибу на оправке	310	900
2	Растяжение моноволокон с коррекцией по формуле(5)	510	640
3	Ультразвук (Динамический метод)	520	540
4	Обратный пересчет модуля упругости макрообразца с учетом объемной доли	300	-

Выводы :

1. Модуль упругости волокон, используемых в работе ВПР-19С находится в диапазоне 500-650 ГПа ;
2. Можно, определить модуль упругости волокон ВПР-19С на коротких образцах длиной от 10 до 20 мм, но при этом необходим учет упругой деформации заклейки.
3. Выводы данной работы применимы ко всем типам высокомодульных и высокопрочных волокон и их текстильным формам (комплексным нитям)

Некоторые результаты данной работы получены в рамках Соглашения о предоставлении минигранта № МГ25/18 от 07 сентября 2018 г., предоставленного Фондом развития Центра разработки и коммерциализации новых технологий

ЛИТЕРАТУРА

1. ASTM C747-93(2010)e1 Standard Test Method for Modul of Elasticity and Fundamental Frequencies of Carbon and Graphite Materials by Sonic Resonance standard by ASTM International, 05/01/2010
2. Горынин Г.Л., Власко А.Ф. Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов при расчете конструкций транспортных сооружений // Вестник СибАДИ. - 2013. - вып. 1 (29). - С. 58-64.
3. K. Ilankeeran, P. M. Mohite, S. Kamle , Axial Tensile Testing of Single Fibres, Modern Mechanical Engineering, 2012, 2, 151-156
4. Баженов С.Л., Рогозинский А.К., Евстифоров С.С., Берлин А.А., Аномальное поведение модуля упругости неорганических стеклянных Е-волокон при удлинении, Доклады Академии наук. 2010. Т. 433. № 2. С. 199-201.
5. Михайлин Ю.А. Волокнистые полимерные композиционные материалы в технике. СПб.: ЦОП «Профессия», 2013. 752 с.
6. Мостовой Г.Е. Оценка упругих и деформационных характеристик углеродных волокон. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2013. Т. 79. № 9. С. 60-64.
7. Мэттьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с
8. Рипп Н.Е., Фролов В.И, Барабанов В.Н. Методы оценки погрешности при испытаниях на растяжение высокомодульных волокон – Заводская лаборатория, - 1973. № 7- С/ 864-866
9. Симамура С., Углеродные волокна. – М.: Мир, 1987.-205 с,
10. Степашкин А.А., Мозолев В.В., Мостовой Г.Е., Оценка ресурса углерод-углеродных тормозных дисков авиаколес с учетом эволюции механических свойств материала, , «Материалы 77-Й Международной научно-технической конференции ААИ «Автомобиле- и тракторостроение в России: Приоритеты развития и подготовка кадров», с.93
11. Фудзии Т.,Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов.- М.:Мир,1982.95 с

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОЭТАЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ НА ДЕРЕВЯННОЙ ОСНОВЕ

Горынин Г. Л., Сухомлинова А. Л.

г. Сургут

Рассматриваются вопросы проектирования многоэтажных конструкций. Предлагается в качестве несущих конструкций использовать конструкции из композитов на деревянной основе.

Ключевые слова: проектирование, композиты, деревянные конструкции.

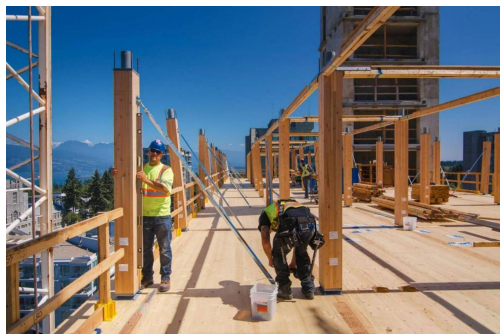
DESIGNING OF MULTYSTOREY STRUCTURES FROM WOODEN COMPOSITES

Gorynin G. L., Suhomlinova A. L.

Surgut

Issues of designing of multystorey structures from wooden composites are considered. Supporting structures of high-rise buildings from composites on a wooden base are proposed.

Keywords: designing, wooden composites, wooden structures.



Строительство высотных жилых домов и бизнес-центров из дерева – тенденция, набирающая все большую популярность в странах Европы и Америки. Технологии деревянного строительства постоянно совершенствуются, и уже становится очевидным тот факт, что строить из дерева – это выгодно, быстро, надежно и безопасно.

Дерево – это возобновляемый природный ресурс, из которого изготавливают современные композитные материалы, отличающиеся высокой прочностью и долговечностью. При этом для производства высокотехнологичных стройматериалов, в частности панелей и бруса, может использоваться низкосортная древесина, щепы и отходы. Производство и обработка строительных конструкций из древесины, равно как их транспортировка и монтаж обходятся дешевле, в сравнении со стальными и железобетонными аналогами.

Здания возводимые из дерева отвечают современным нормам энергоэффективного строительства. Их можно возводить на территориях со сложными инженерно-геологическими условиями, в том числе – с сейсмической активностью. Для возведения многоэтажных домов используются высокопрочные композитные материалы на основе древесины, в частности – LVL брус и CLT панели. LVL брус применяется в качестве вертикальных и горизонтальных элементов несущего каркаса здания. Материал представляет собой многослойный шпон из дерева хвойных пород.

Безопорный пролет балок из LVL бруса может достигать 36 м, а ферм – 42 м и более [1]. Брус не дает усадки и остается геометрически стабильным на протяжении всего срока службы. В отличие от обычного дерева LVL не подвержен воздействию микроорганизмов, не деформируется от сырости, устойчив к химической агрессии [2]. Современные технологии изготовления позволяют добиться высокой степени готовности строительных конструкций, а сборка деревянного каркаса на площадке выполняется по аналогии с монтажом быстровозводимых зданий из стали.

CLT плиты и панели – композитный материал, изготавливаемый методом перекрестного склеивания слоев древесины. Применяется в качестве ограждающих конструкций, плит перекрытия и покрытия зданий. Конструкции CLT отличаются легкостью, пожаробезопасностью, высокими показателями прочности, тепло- и звукоизоляции. Материалы CLT и LVL могут комбинироваться друг с другом. Например, каркас здания может состоять из LVL бруса, а стены и перекрытия – из панелей CLT. Скорость монтажа

деревянных конструкций выше, чем в любом другом виде строительства и обусловлена технической возможностью транспортировки готовых блоков и модулей к месту проведения работ. Современное оборудование способно производить CLT панели длиной до 24 м и шириной до 3,5 м, что позволяет монтировать ограждающие конструкции целого этажа здания за один прием

Почти пятая часть всей мировой ресурсной базы леса находится на территории Российской Федерации. При грамотной организации выращивания и промышленного использования древесины, ее запасы для России – неисчерпаемы. С учетом внедрения новых технологий деревообработки стоимость такого стройматериала может постепенно снижаться, тогда как цены на производство бетона и стали постоянно растут. Однако сегодня строительство из дерева в нашей стране регламентируется нормативами более чем полувековой давности. В первую очередь это касается регламентов пожарной безопасности, которые не учитывают характеристик современных композиционных материалов CLT и LVL. Поэтому, в установленном порядке можно проектировать и строить деревянные здания высотой не более 5 метров и площадью – до 500 м². Любые примеры многоэтажного строительства в России относятся к разряду «уникальных» и «экспериментальных». Тем не менее, они существуют. Для того чтобы вписаться в действующие нормы, для возведения зданий используется комбинированная технология железобетонного и деревянного строительства, когда монолитный каркас обшивается CLT-панелями. К сожалению, при отсутствии соответствующей нормативной базы, многоэтажное строительство из дерева в России не выгодно. Для каждого проекта приходится получать множество согласований и заключений, заново проводить испытания материалов, составлять обоснования, решать вопросы с местными властями, различными ведомствами и органами надзора. Не существует стандартного пути получения разрешительной документации на строительство деревянных многоэтажных зданий.

При этом в развитии технологии строительства из дерева заинтересованы все: производители стройматериалов, строительной химии (клеевых составов, пропиток и добавок, красок), проектные и подрядные организации.

В Японии проведено исследование — использование дерева в строительстве благотворно влияет на здоровье, снижает, например, давление на десять пунктов. Доказано, что обучаемость в деревянных интерьерах на 15-20% выше. Кроме всего прочего, человеческий глаз никогда не устает смотреть на дерево, потому что его фактура и рисунок уникальны. Думается, даже этих фактов достаточно для того, чтобы человек сделал выбор в пользу дерева.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-01326.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г.Л., Григорьев Ю.И. Моделирование плит покрытий из древесины и композитных материалов на основе разномодульной теории // Вестник кибернетики. – 2018. – № 3(31). – С. 169-179.
2. Gorynin G.L., Nemirovskii Y. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 2. Effect of edge boundary layers on the stress-strain properties of the composite // *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, № 1, 2010. – pp. 1–14.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТРУБОБЕТОННОЙ СТОЙКИ

Горынин Г. Л., Снигирева В. А.

г. Сургут

В работе предложен новый тип трубобетонной конструкции – предварительно напряженная трубобетонная стойка. Предварительное напряжение бетонного ядра стойки реализуется в результате наличия выступа бетонного цилиндра над стальной трубой по высоте и работе конструкции как бетонной стойки в стальной обойме на начальном этапе. После сжатия бетонного ядра на величину выступа стальная труба включается в работу в продольном направлении, и конструкция работает как традиционная трубобетонная стойка. Применение трубобетонной стойки предложенного типа приводит к увеличению расчетной нагрузки по сравнению с традиционной стойкой и бетонной стойкой в стальной обойме.

Ключевые слова: трубобетонная конструкция, всестороннее сжатие бетона, предварительно напряженные конструкции.

STRESS-STRAIN STATE OF PRE-STRESSED CONCREET-FILLED STEEL TUBE COLUMN

Gorynin G. L., Snigireva V. A.

Surgut

A new type of concreet-filled steel tube structure was proposed in the work - a pre-stressed concreet-filled steel tube column. The pre-stressing of the concrete core of the column is realized as a result of the protrusion of the concrete cylinder above the steel tube in height and the construction of the structure as a concrete column in the steel cage at the early stage. After compression of the concrete core to the size of the protrusion, the steel tube is compressed in the longitudinal direction, and the column works as a traditional column. The use of pre-stressed concreet-filled steel tube column leads to an increase in the design load compared to the traditional column and concrete column in a steel cage.

Keywords: concreet-filled steel tube structures, triaxial concrete compression, pre-stressed structures.

Введение

Традиционные трубобетонные конструкции представляют собой стальную трубу, заполненную бетонной смесью. Основной идеей проектирования трубобетонных конструкций является реализация всестороннего обжатия бетона вследствие сдерживания его поперечных деформаций трубой, в результате чего прочность бетона возрастает [2]. При загрузении традиционной трубобетонной стойки внешняя нагрузка передается на все поперечное сечение элемента, включая трубу. Однако, в связи с разность коэффициентов Пуассона стали и бетона, труба стремится оторваться от бетонного ядра, растягивая его в радиальном направлении [1]. С целью решения данной проблемы в ранней работе [1] предложена улучшенная конструкция трубобетонной стойки, а именно бетонной стойки в стальной обойме, при загрузении которой нагрузка прикладывается только к бетонному ядру, а труба используется в качестве обоймы. При применении такого типа конструкции бетон находится в состоянии всестороннего сжатия, его прочность возрастает, однако стальная труба оказывается недостаточно загруженной, так

как исключается ее работа в продольном направлении. Предлагается применению трубобетонной стойки комбинированного типа, при работе которой реализуются лучшие свойства бетона и стали.

1. Предварительно напряженная трубобетонная стойка

Трубобетонная стойка нового предлагаемого типа, предварительно напряженная трубобетонная стойка, до приложения внешней нагрузки представляет собой стальную трубу, заполненную бетонной смесью с выступом бетонного ядра над уровнем стальной трубы на величину d в верхней опорной части (рис.1).

Работа предлагаемой предварительно напряженной трубобетонной стойки, характеризуется двумя стадиями, переход между которыми реализуется в следствии возрастания внешней нагрузки в процессе монтажа опирающихся конструкций.

Стадия 1 «Бетонная стойка в стальной обойме»: нагрузка прикладывается только на выступающее над уровнем трубы бетонное ядро, труба работает в качестве обоймы, оказывая сжимающее давление на бетон в радиальном направлении p . В результате всестороннего сжатия прочность бетона возрастает. При приложении нагрузки P_d , высота бетонного ядра укорачивается на величину d , работа стойки переходит на новую стадию.

Стадия 2 «Традиционная трубобетонная стойка с предварительно обжатым бетонным ядром»: нагрузка прикладывается на всё сечение стойки, включая стальную трубу, что позволяет увеличить внешнюю нагрузку. Стальная труба претерпевает приращение поперечных перемещений от действия продольной нагрузки, превышающее приращение перемещений бетона, в результате чего обжатие бетона трубой падает. Предельным состоянием считается уменьшение давления обжатия бетона трубой до нуля либо достижение напряжений в стали и/или бетоне величины расчетного сопротивления. Растяжение бетона трубой в радиальном направлении и ее отрыв не допускается.

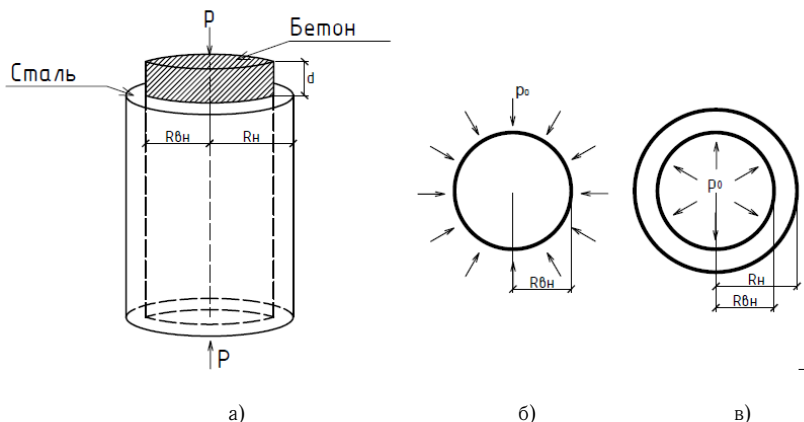


Рис. 1. Расчетная схема предварительно напряженной трубобетонной стойки: а) предварительно напряженная трубобетонная стойка на первой стадии работы; б) сечение бетонного ядра стойки; в) сечение стальной трубы стойки

2. Моделирование напряженно-деформированного состояния бетона трубобетонной стойки в нелинейном случае

Применяя диаграмму для одноосного напряженно-деформированного состояния, согласно СП [3] получаем диаграммы для описания пространственного напряженно-деформированного бетона (рис.2).

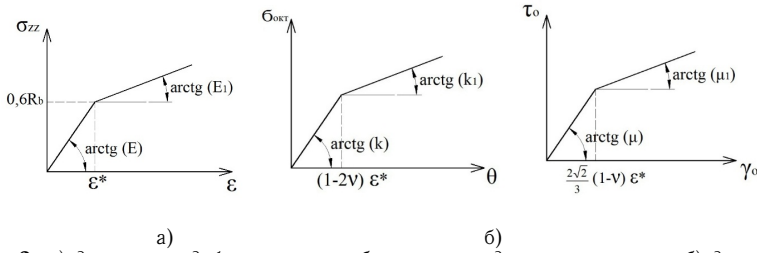


Рис. 2. а) диаграмма деформирования бетона при одноосном сжатии; б) диаграммы деформирования бетона при трехосном сжатии (напряжения и деформации используются без учета знака)

Величины на диаграммах (рис.2) имеют физический смысл. В осесимметричном случае загрузки бетонного цилиндра радиальные и тангенциальные деформации совпадают [1] $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \cdot \varepsilon_{zz}$, в таком случае:

$$\theta = \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{rr},$$

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \cdot \theta = k \cdot \theta,$$

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2} = \mu \cdot \gamma_0,$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{zz})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr}),$$

где ν и E - коэффициент Пуассона и модуль Юнга бетона.

Значения напряжений, возникающих в бетонном ядре, определяются в соответствии с законом напряженно-деформированного состояния бетона трубобетонной стойки (на основе закона Гука в записи Ламе):

$$\sigma_{rr}^C = \sigma_{rr-i}^C + \Delta\sigma_{rr-i}^C, \sigma_{\theta\theta}^C = \sigma_{\theta\theta-i}^C + \Delta\sigma_{\theta\theta-i}^C, \sigma_{zz}^C = \sigma_{zz-i}^C + \Delta\sigma_{zz-i}^C, \\ \varepsilon_{rr}^C = \varepsilon_{rr-i}^C + \Delta\varepsilon_{rr-i}^C, \varepsilon_{\theta\theta}^C = \varepsilon_{\theta\theta-i}^C + \Delta\varepsilon_{\theta\theta-i}^C, \varepsilon_{zz}^C = \varepsilon_{zz-i}^C + \Delta\varepsilon_{zz-i}^C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\sigma_{rr-i}^C = (\lambda_i^C + 2\mu_i^C)\Delta\varepsilon_{rr-i}^C + \lambda_i^C(\Delta\varepsilon_{\theta\theta-i}^C + \Delta\varepsilon_{zz-i}^C); \\ \Delta\sigma_{\theta\theta-i}^C = (\lambda_i^C + 2\mu_i^C)\Delta\varepsilon_{\theta\theta-i}^C + \lambda_i^C(\Delta\varepsilon_{rr-i}^C + \Delta\varepsilon_{zz-i}^C); \\ \Delta\sigma_{zz-i}^C = (\lambda_i^C + 2\mu_i^C)\Delta\varepsilon_{zz-i}^C + \lambda_i^C(\Delta\varepsilon_{rr-i}^C + \Delta\varepsilon_{\theta\theta-i}^C). \end{array} \right.$$

$$\Delta\varepsilon_{rr-i}^C = \frac{d\Delta U_i^C}{dr}, \Delta\varepsilon_{\theta\theta-i}^C = \frac{\Delta U_i^C}{r}, \Delta\varepsilon_{zz-i}^C = \frac{d\Delta W_i^C}{dz},$$

где: $i = 0$ при $\gamma_0 \leq \gamma_0^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - \nu^C) \cdot \varepsilon^*$, $\theta \leq \theta^* = (1 - 2\nu^C) \cdot \varepsilon^*$; $\mu_0 = \mu^I = \frac{E^C}{2(1+\nu^C)}$,
 $k = \lambda^I + \frac{2}{3}\mu^I$, $\lambda_0 = \lambda^I = \frac{E^C \nu^C}{(1-2\nu^C)(1+\nu^C)}$;

$i = 1$ при $\gamma_0 \geq \gamma_0^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - \nu^C) \cdot \varepsilon^*$, $\theta \leq \theta^* = (1 - 2\nu^C) \cdot \varepsilon^*$; $\mu_1 = \mu_1^C = \frac{E_1^C}{2(1+\nu^C)}$,
 $k = \lambda^I + \frac{2}{3}\mu^I = \lambda^{I'} + \frac{2}{3}\mu_1^I$; $\lambda_1 = \lambda^{I'} = \lambda^C + \frac{2}{3}(\mu^C - \mu_1^C)$;

$i = 2$ при $\gamma_0 \geq \gamma_0^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - \nu^C) \cdot \varepsilon^*$, $\theta \geq \theta^* = (1 - 2\nu^C) \cdot \varepsilon^*$; $\mu_2 = \mu_1 = \mu_1^C = \frac{E_1^C}{2(1+\nu^C)}$,
 $k_1 = \lambda_1^C + \frac{2}{3}\mu_1^I$; $\lambda_2 = \lambda_1^C = \frac{E_1^C \nu^C}{(1-2\nu^C)(1+\nu^C)}$;

$$\sigma_{\alpha\alpha_0*}^C = \varepsilon_{\alpha\alpha_0*}^C = 0 (\alpha \in \{r, \theta, z\});$$

$\sigma_{\alpha\alpha_1*}^C, \varepsilon_{\alpha\alpha_1*}^C$ - напряжения и деформации соответственно при $\gamma_0 = \gamma_0^*$, $\theta < \theta^*$;

$\sigma_{\alpha\alpha_2*}^C, \varepsilon_{\alpha\alpha_2*}^C$ - напряжения и деформации соответственно при $\theta = \theta^*$, $\gamma_0 > \gamma_0^*$;

$\Delta\sigma_{\alpha\alpha_i*}^C, \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha_i*}^C$ - приращения напряжений и деформаций соответственно.

При загрузении бетонной стойки в стальной обойме [1]:

$$P_{\gamma*} = \frac{1,2R_b \cdot F^C(1-\nu^C)\mu(L_0-K)}{E^C(G_0+L_0-K)} \text{ при } \gamma_0 = \gamma_0^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - \nu^C) \cdot \varepsilon^*, \theta < \theta^*,$$

$$P_{\theta*} = \frac{0,6R_b \cdot F^C(L_0-K)}{L_0-K-2G_0} \text{ при } \theta = \theta^* = (1 - 2\nu^C) \cdot \varepsilon^*, \gamma_0 > \gamma_0^*.$$

$$K = \frac{\mu^S(3\lambda^S + 2\mu^S) + (\lambda^S)^2}{2\mu^S(\lambda^S + \mu^S)(3\lambda^S + 2\mu^S)} \cdot \frac{R_{2=}^2}{R_{2=}^2 - R_{2-}^2} + \frac{R_{2-}^2}{2\mu^S(R_{2=}^2 - R_{2-}^2)},$$

$$L_0 = -\frac{\mu^C(3\lambda^C + 2\mu^C) + (\lambda^C)^2}{2\mu^C(\lambda^C + \mu^C)(3\lambda^C + 2\mu^C)}, L_1 = -\frac{\mu_1^C(3\lambda^{I'} + 2\mu_1^C) + (\lambda^{I'})^2}{2\mu_1^C(\lambda^{I'} + \mu_1^C)(3\lambda^{I'} + 2\mu_1^C)},$$

$$L_2 = -\frac{\mu_1^C(3\lambda_1^C + 2\mu_1^C) + (\lambda_1^C)^2}{2\mu_1^C(\lambda_1^C + \mu_1^C)(3\lambda_1^C + 2\mu_1^C)}, G_0 = \frac{\lambda^C}{2\mu^C(3\lambda^C + 2\mu^C)},$$

$$G_1 = \frac{\lambda^{I'} + \mu_1^C}{2\mu_1^C(3\lambda^{I'} + 2\mu_1^C)}, G_2 = \frac{\lambda_1^C}{2\mu_1^C(3\lambda_1^C + 2\mu_1^C)}, \lambda^S = \frac{E^S \nu^S}{(1 - 2\nu^S)(1 + \nu^S)}, \mu^S = \frac{E^S}{2(1 + \nu^S)},$$

где ν^S и E^S - коэффициент Пуассона и модуль Юнга стали; F, F^S - площадь сечения бетона и стали соответственно.

3. Напряженно-деформированное состояние предварительно напряженной трубобетонной стойки

Используя решения пространственной задачи для бетонной стойки в стальной обойме и традиционной трубобетонной стойки [5] с учетом нелинейности деформирования бетона, получаем:

$$P_d = P_{i*} + \frac{(d - d_{i*}) \cdot F^C}{h \left(\frac{2G_i^2}{L_i - K} + N_i \right)} = P_{i*} + (d - d_{i*}) \frac{F^C(L_i - K)}{h(2G_i^2 + N_i(L_i - K))}.$$

где $P_{0*} = 0$, если $0 \leq P_d \leq P_{\gamma*}$; $P_{1*} = P_{\gamma*}$, если $P_{\gamma*} \leq P_d \leq P_{\theta*}$; $P_{2*} = P_{\theta*}$, если $P_{\theta*} \leq P_d$;

$\Delta d = d - d_{i*}$, d_{i*} - величина выступа бетонного ядра при $P_d = P_{i*}$.

$$\Delta p_0 (AB048O1) = -\Delta p^C \frac{G_i}{L_i - K}, \Delta p^C = \frac{\Delta P_d}{F^C}.$$

При переходе на вторую стадию работы труботетонной стойки нагрузка возрастает на величину ΔP :

$$P = P_d + \Delta P.$$

$$\Delta p_0 (AB048O2) = \Delta P \frac{N_i D + Y G_i}{F^C (Y (K - L_i) + D (2G_i - \alpha)) + F^S (G_i (2G_i - \alpha) - N_i (K - L_i))}.$$

Несущая способность труботетонной стойки ограничивается величиной максимальных допустимых напряжений (расчетного сопротивления), возникающих в бетонном ядре и трубе. Предел прочности бетона, который возрастает в следствии всестороннего обжатия, определяем согласно зависимости [2] :

$$R_{b,3} = R_b + 4 \cdot p_0,$$

где $R_{b,3}$ - предел прочности ядра в обжатом состоянии, R_b - предел призмной прочности бетона.

Рассмотрим примеры расчета предварительно напряженной труботетонной стойки различных размеров с учетом нелинейности диаграммы деформирования бетона. Принимаем высоту стойки $h=3,5$ м. Деформационно-прочностные характеристики материалов принимаем согласно СП [3] с учетом ползучести бетона и СП [4]: $E^C = 11129$ МПа, $E_1^C = 33214$ МПа, $\nu^C = 0,2$, $R_b = 19,5$ МПа (бетон В 35) и $E^S = 206000$ МПа, $\nu^S = 0,3$ (сталь С245). Результаты представлены в таблице 1, где P_{max} – несущая способность бетонной стойки в стальной обойме аналогичных размеров. Величину выступа d подбираем так, чтоб напряжения в бетоне и стали были максимально близки к расчетным сопротивлениям с шагом 5 мм.

Таблица 1
Примеры расчета предварительно напряженной труботетонной стойки

Диаметр внешний трубы D, мм.	Толщина стенки трубы t, мм	Pmax, МН (при бетон. ст. в. стал. обойме)	d, мм.	Pd, МН	P, МН	P/Pmax
530	9	9,46	30	7,61	10,46	1,10
	10	10,0	30	7,56	11,37	1,14
	12	11,05	35	8,48	12,60	1,14
630	10	12,91	25	9,32	14,81	1,15
	12	14,20	30	10,67	16,19	1,14
	16	16,66	35	11,85	19,69	1,18
720	10	15,79	25	12,25	17,61	1,12
	11	16,54	25	12,19	18,80	1,14
	12	17,23	30	14,06	19,02	1,10
	16	20,18	35	15,67	22,87	1,13
920	10	23,07	20	17,00	25,79	1,12
	12	25,03	25	20,06	27,45	1,10
	16	28,85	30	22,0	32,11	1,11

Выводы и результаты:

1. Предложена конструкция предварительно напряженной трубобетонной стойки, сочетающей преимущества работы бетонной стойки в стальной обойме и традиционной трубобетонной стойки.
2. Получены формулы, позволяющие провести пространственный расчет предварительно напряженной трубобетонной стойки с учетом характеристик материалов, нелинейности диаграммы деформирования бетона размеров поперечного сечения бетонного ядра и толщиной стенки стальной трубы.
3. Создание предварительного обжатия бетонного ядра и загрузку стальной трубы в продольном направлении при применении предварительно напряженной трубобетонной стойки приводит к увеличению несущей способности стойки на 10-18 % по сравнению с несущей способностью бетонной стойки в стальной обойме.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-01326.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г. Л., Снигирева В. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния трубобетонных конструкций с учетом нелинейного поведения бетона // Известия высших учебных заведений. Строительство. Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 2017. № 4 (700). С. 17-29.
2. Кикин А.И., Санжаровский Р.С., Труль В.А. Конструкции из стальных труб, заполненных бетоном. – М.: Стройиздат, 1974. 144 с.
3. СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*».
4. СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003».
5. Snigireva, V.A., Gorynin, G.L. The nonlinear stress-strain state of the concrete core in the concrete-filled steel tube structures // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – 83 (7). Pp. 74–83. doi: 10.18720/MCE.83.7.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО МОДУЛЯ СДВИГА ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Горынин Г. Л., Власко А. Ф.

г. Сургут

Рассмотрен метод ячейковых функций, позволяющий определять механические макрохарактеристики материалов, периодически армированных волокнами [1]. Метод основан на асимптотическом расщеплении пространственной задачи теории упругости, без введения дополнительных гипотез о деформациях и напряжениях, возникающих на микроуровне. Представлены зависимости значений макромодулей Юнга и сдвига от доли волокна в материале.

Ключевые слова: волокнистый, композит, периодический, модуль сдвига, макрохарактеристики.

MATHEMATICAL MODELING OF THE MACROSCOPIC MODULE OF THE SHIFT OF FIBER MATERIALS

Gorynin G. L., Vlasko A. F.
Surgut

The method of cell functions is considered, which makes it possible to determine the mechanical macrocharacteristics of materials periodically reinforced with fibers [1]. The method is based on the asymptotic splitting of the spatial problem of the theory of elasticity, without introducing additional hypotheses about deformations and stresses arising at the micro level. The dependences of the values of Jung macromodules and shear on the fiber share in the material are presented.

Keywords: fibrous, composite, periodic, shear modulus, macrocharacteristics.

Введение. Волокнистый материал – составной материал, состоит из материала матрицы, заполненного прочными волокнами. В данной работе рассматриваются волокнистые материалы, волокна в которых: прямолинейны и расположены параллельно друг другу. Волокна располагаются таким образом, что функция физических свойств материала, в плоскости перпендикулярной волокнам, является 2-периодической (рис. 1). Плоскость, перпендикулярную волокнам, можно представить состоящей из множества одинаковых прямоугольников – ячеек. Численный расчет поля напряжений конструкции, произведённой из композитных материалов, тем трудозатратнее, чем меньше размер ячейки по сравнению с характерным размером конструкции, вплоть до полной невозможности решить задачу за разумное время. Это связано с тем, что поле напряжений в таком материале будет представлять собой быстроизменяющуюся функцию, так как среды, входящие в состав композита, часто сменяют друг друга. Эта проблема решается заменой в расчётах неоднородного материала однородным макроматериалом. Такой материал обладает упругими макрохарактеристиками – средними мерами упругих модулей сред неоднородного материала, учитывающими все свойства этих сред и их взаимодействия. Тем не менее, остается открытым вопрос получения таких макрохарактеристик. Часто они получаются на основе некоторых гипотез о протекающих в композитных материалах процессах упругого взаимодействия, на основе моделей, заменяющих реальную структуру материала некоторой обобщённой. В данной работе представлен метод вычисления макрохарактеристик, без введения дополнительных гипотез, основанный на асимптотическом расщеплении пространственной задачи теории упругости. Единственное условие – размер периода физических свойств (размер ячейки) должен быть на порядок меньше размеров самой конструкции [2].

Постановка задачи.

Рассмотрим тело из волокнистого материала (рис. 1), волокна прямолинейны, параллельны и периодически повторяются в плоскости сечения Oxy . На тело действуют некоторые нагрузки. Отношение размера периодической ячейки среды к характерному размеру тела является малым параметром:

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1 \quad (1)$$

где h - размер ячейки, L - характерный размер тела.

В каждой точке конструкции выполняются уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y} \varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z} \varepsilon + F_{\alpha} = 0, \quad \alpha = \{x, y, z\}, \quad (2)$$

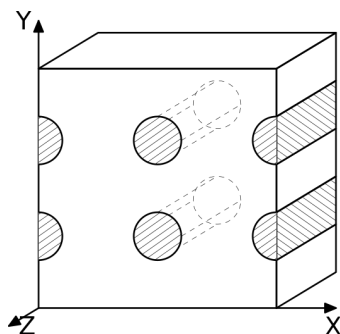


Рис. 1. Волокнистый материал

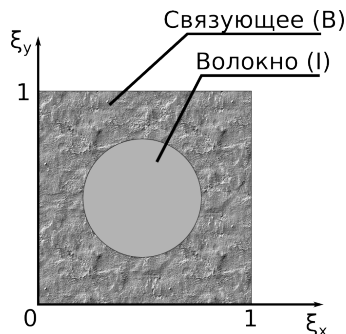


Рис. 2. Периодическая ячейка

где F_α - объемные силы, а $\sigma_{\alpha\beta}$ - напряжения, определяющиеся по закону Гука для анизотропной среды:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\phi, \varphi \in \{x, y\}} E_{\alpha\beta\varphi\psi} \frac{\partial(u_\phi)}{\partial\varphi} \varepsilon, \quad \alpha, \beta, \varphi, \psi \in \{x, y, z\}, \quad (3)$$

где $E = [E_{\alpha\beta\varphi\psi}(\xi_x, \xi_y)]$ - тензор податливости, внутри каждой упругой среды он может непрерывно меняться, а на границах сред претерпевать скачки. В (2)-(3) переменные безразмерны по следующим правилам:

$$x \leftrightarrow x/L, \quad y \leftrightarrow y/L, \quad z \leftrightarrow z/L, \quad u_\alpha \leftrightarrow u_\alpha/h, \quad E_{\alpha\beta\varphi\psi} \leftrightarrow E_{\alpha\beta\varphi\psi}/\bar{E}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \leftrightarrow \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\bar{E}}, \quad q_\alpha \leftrightarrow \frac{q_\alpha}{\bar{E}}, \quad \bar{F}_\alpha = \frac{F_\alpha h}{\bar{E}}.$$

На границе перехода от одной упругой среды к другой должны быть непрерывны перемещения и контактные напряжения:

$$[\sigma_{\alpha n}] = 0, \quad [u_\alpha] = 0, \quad \alpha = \{x, y, z\}, \quad (5)$$

где $\sigma_{\alpha n}$ - контактные напряжения, которые по определению вычисляются по следующей формуле

$$\sigma_{\alpha n} = \sigma_{\alpha x} n_x + \sigma_{\alpha y} n_y + \sigma_{\alpha z} n_z. \quad (6)$$

Быстро осциллирующее решение (при условии 1) задачи теории упругости (2-6) можно представить в виде композиции медленно меняющегося решения (в макроматериале) и быстро меняющегося периодического [1]:

$$(u_\alpha)^{(n)} = v_\alpha^{(n)} + \sum_{\eta_0 \in \{v_x, v_y, v_z\}} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} (U_\beta^\eta)^{\bar{k}} \frac{\partial^k \eta_0^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right), \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad \beta \in \{x, y\}; \quad (7)$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})^{(n)} = \sum_{\eta_0 \in \{v_x, v_y, v_z\}} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} (\tau_{\alpha\beta}^\eta)^{\bar{k}} \frac{\partial^k \eta_0^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right), \quad (8)$$

здесь n - номер асимптотического приближения, v_α - решение для макроматериала, $(U_\alpha^\eta)^{\bar{k}}$ - периодическая компонента решения (ячейковые перемещения), $(\tau_{\alpha\beta}^\eta)^{\bar{k}}$ - ячейковые напряжения, $\bar{k}$ - вектор, определяемый таким образом:

$$\bar{k} = (k_x, k_y, k_z) = k_x \bar{M}_x + k_y \bar{M}_y + k_z \bar{M}_z, \quad |\bar{k}| = k = k_x + k_y + k_z, \quad (9)$$

$$\partial \tau^{\bar{k}} = \partial x^{k_x} \partial y^{k_y} \partial z^{k_z}, \quad k_\alpha \geq 0, \quad k_\alpha \in Z$$

Для определения макрохарактеристик необходимо найти периодическую компоненту $(\tau_{\alpha\beta}^\eta)^{\bar{k}}$.

Для этого в ячейке (рис. 2) задается локальная система координат $\xi_y, \xi_y \in [0,1]$, координатные оси параллельны осям глобальной системы координат. Ячейковые перемещения определяются решением девять краевых задач, для $\theta, \lambda \in \{x, y, z\}$:

$$\frac{\partial(\tau_{\alpha x}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial(\tau_{\alpha y}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}}{\partial \xi_y} = 0, \quad \alpha = \{x, y, z\}; \quad (10)$$

закон упругости на ячейке –

$$(\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} = E_{\alpha\beta\theta\lambda} + \sum_{\phi, \varphi \in \{x, y\}} E_{\alpha\beta\phi\varphi} \frac{\partial(U_\phi^{\nu_\theta})^{\mu_\lambda}}{\partial \xi_\varphi} + \sum_{\varphi \in \{x, y\}} E_{\alpha\beta z\varphi} \frac{\partial(U_z^{\nu_\theta})^{\mu_\lambda}}{\partial \xi_\varphi}; \quad (11)$$

условия непрерывности ячейковых функций внутри ячейки на границе различных сред –

$$\left[(\tau_{\alpha n}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} \right] = 0, \quad \left[(U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} \right] = 0; \quad (12)$$

условие периодичности ячейковых функций –

$$(U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}(\xi_x, \xi_y) \Big|_{\xi_\lambda=0} = (U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}(\xi_x, \xi_y) \Big|_{\xi_\lambda=1}, \quad (13)$$

$$(\tau_{\alpha\chi}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}(\xi_x, \xi_y) \Big|_{\xi_\chi=0} = (\tau_{\alpha\chi}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}(\xi_x, \xi_y) \Big|_{\xi_\chi=1}, \quad \chi \in \{x, y\};$$

условие нормировки решения –

$$\langle (U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} \rangle = 0, \quad (14)$$

где $\langle _ \rangle$ - интеграл от какой-то величины по ячейковым переменным, взятый по всей ячейке, усреднение этой величины по ячейке:

$$\langle _ \rangle = \int_0^1 \int_0^1 _ d\xi_x d\xi_y. \quad (15)$$

Решением девяти краевых задач (10)-(14) являются восемнадцать ячейковых перемещений $(U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)$, однако не все они независимы, для них выполняются неравенства:

$$(U_\alpha^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} = (U_\alpha^{\nu_\lambda})^{\bar{M}_\theta}, \quad (\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\theta})^{\bar{M}_\lambda} = (\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\lambda})^{\bar{M}_\theta}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \theta \in \{x, y, z\}. \quad (16)$$

То есть, необходимо решить не девять, а шесть краевых задач (10)-(14).

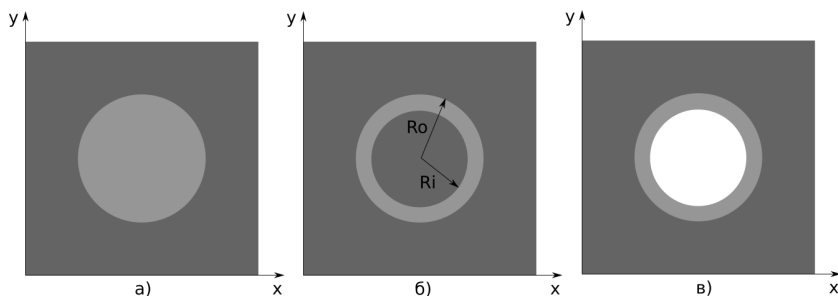


Рис. 3. Форма волокна: а) цельное круглое сечение, б) трубка, заполненная бетоном, в) полая трубка

Из решений краевых задач (10)-(14) вычисляются макрохарактеристики материала по формуле:

$$\tilde{E}_{ijkl} = \langle E_{ijkl} \rangle + \left\langle \sum_{\phi, \varphi \in \{x, y\}} E_{ij\phi\varphi} \frac{\partial (U_{\phi}^{\nu_k})^{\tilde{M}_l}}{\partial \xi_{\varphi}} + \sum_{\varphi \in \{x, y\}} E_{ijz\varphi} \frac{\partial (U_z^{\nu_k})^{\tilde{M}_l}}{\partial \xi_{\varphi}} \right\rangle, \quad i, j, k, l \in \{x, y, z\}. \quad (17)$$

Расчеты и их анализ.

Цель: продемонстрировать влияние формы поперечного сечения волокна на значения макро модулей Юнга и сдвига.

Входные данные.

Композитный материал – бетон, армированный прямолинейными параллельными волокнами из стали. Модуль Юнга стали, в безразмерных величинах – 10, модуль Юнга для бетона – 1. Коэффициент Пуассона стали – 0.28, коэффициент Пуассона для бетона – 0.2. Модуль сдвига стали, в безразмерных величинах – 1.95, модуль сдвига для бетона – 0.21. Формы поперечного сечения волокон трех типов: цельное круглое сечение, трубка заполненная бетоном, полая трубка (рис. 3). Отношение внутреннего радиуса трубок к внешнему – 0.8.

Результат.

Краевые задачи (10)-(14) на ячейке решались методом конечных элементов. Результаты интегрирования функций по ячейке представлены в виде графиков (рис.4)-(рис.9), на них отображена зависимость коэффициентов упругости от коэффициента армирования θ . Коэффициент армирования – отношения площади сечения волокна к общей площади ячейки.

Как видно из графиков упругие макроконстанты существенно отличаются для сечений разной формы при одинаковом коэффициенте армирования. Для взятых материалов и толщины трубок, можно видеть интересный результат, что поперечный модуль Юнга почти не зависит от коэффициента армирования (рис. 4), а модуль сдвига и вовсе убывает при увеличении коэффициента армирования (рис. 5). Из графиков сравнение полученных модулей с двумя методами осреднения видно что лучшее приближение даёт среднее гиперболическое.

Закключение.

Отличие усреднённых характеристик волокнистого материала, в случае различных форм сечений, при одинаковых значениях коэффициента армирования, может превосхо-

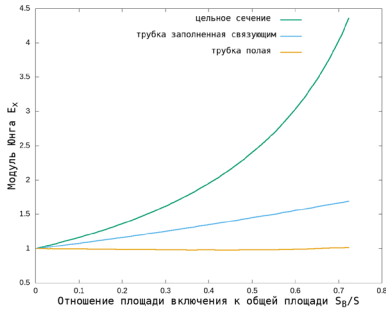


Рис. 4. Модуль Юнга в поперечном направлении для трёх сечений

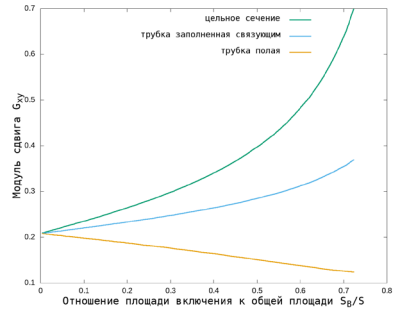


Рис. 5. Модуль сдвига в поперечном направлении для трёх сечений

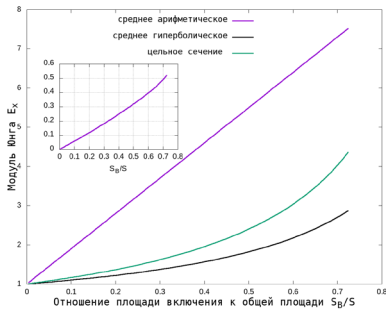


Рис. 6. Модуль Юнга для цельного сечения и сравнение с средним геометрическим

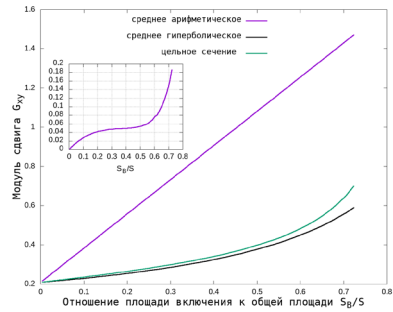


Рис. 7. Модуль Юнга для цельного сечения и сравнение с средним геометрическим

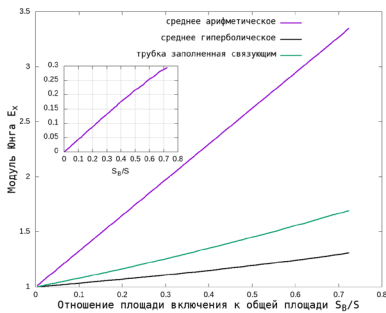


Рис. 8. Модуль сдвига для заполненной трубки и сравнение с средним геометрическим

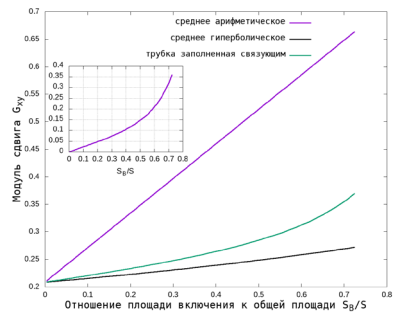


Рис. 9. Модуль сдвига для заполненной трубки и сравнение с средним геометрическим

доть 100%. Следовательно, использование методов расчета усреднённых характеристик, не учитывающих эту форму или основанных на обобщённых моделях, сильно ограничено. Использование в производстве конкретной формы сечения волокна композита соотносительно с функцией конструкции, произведенной из него, позволит усилить положительные качества конструкции, например, прочность, ослабить отрицательные, например, вес, и снизить себестоимость производства за счет использования меньшего объема материала волокна.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-47-860015.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г.Л., Власко А.Ф. Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов при расчете конструкций транспортных сооружений // Вестник СибАДИ. – 2013. – №1(29). – С. 58-64.
2. Gorynin G., Nemirovskii Y., Vlasko A. Multiscale simulation of thermal stresses in 3D periodic anisotropic bodies // AIP Conference Proceedings 1893, 030111 (2017)

О РАЗЛИЧНОМ РЕШЕНИИ ВЫБОРА ВИДА СВАЙ ДЛЯ ВЕЧНОМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ СЕВЕРНЫХ ТЕРРИТОРИЙ

Масленникова И. И., Жиренков А. Н.

Сургутский государственный университет, zvfmadi@mail.ru

В статье рассматривается работа свайных фундаментов различного типа в зависимости от принятой технологии эксплуатации системы сооружений, частично расположенной в акватории моря, частично в прибрежной зоне Северного ледовитого океана страны. Грунтами основания этой системы служат многолетние мерзлые грунты (ММГ) свойства которых, в настоящее время, недостаточно изучены. В связи с этим, актуальными вопросами проектирования свайных фундаментов в подобных условиях являются вопросы правильного выбора типа, вида свайных фундаментов обеспечивающих непрерывное производство работ нулевого цикла в экстремальных условиях работ при полярной ночи и штормовых ветрах, дующих с северного побережья, а также давлений, передаваемых на них с моря от морских течений. Часто, строящиеся на побережье сооружения, возводятся на намывных грунтах основания. Правильный выбор того или иного вида, типа свайных фундаментов позволит значительно сократить сроки строительства и стоимость производства строительно – монтажных работ.

Ключевые слова: акватория моря, плавучая система колебание моря, свайное поле, оползневые процессы.

ABOUT DIFFERENT SOLUTION OF THE SELECTION OF THE TYPE OF PILES FOR ETERNAL GROUND SOILS OF THE BASIS OF THE NORTHERN TERRITORIES

Maslennikova Y. Y., Zhirenkov A. N.

Surgut State University, zvfmadi@mail.ru

The article discusses the work of pile foundations of various types depending on the adopted technology of operating a system of structures, partially located in the sea, partly in



Рис. 1. г. Певек (проект) ПАТЭС, 2019



Рис. 2. Акватория Северного океана. Разгрузка строительных модулей

the coastal zone of the Arctic Ocean of the country. The grounds of this system are the soils of the perennial frozen soils (ММГ) whose properties are currently not well understood. In this regard, topical issues in the design of pile foundations in such conditions are the correct choice of the type, type of pile foundations ensuring continuous production of zero-cycle works under extreme working conditions during the polar night and storm winds blowing from the north coast, as well as pressures transferred to them from the sea from the sea currents. Often, buildings built on the coast are erected on the alluvial grounds of the foundation. The correct choice of one or another type, such as pile foundations, will significantly reduce the construction time and the cost of construction and installation work.

Keywords: water area of the sea, floating system, sea fluctuations, pile field, landslide processes.

В настоящее время приоритетные направления освоения просторов крайнего Севера РФ основаны на более полном использовании электроэнергии вырабатываемой мобильными атомными электростанциями, расположенными непосредственно в зоне добычи и переработки добываемых полезных природных ресурсов. Такой подход позволяет обеспечивать требуемое энергопотребление мощных машин и механизмов используемых при добыче ископаемых в условиях вечной мерзлоты и штормовых ветров дующих с океана. Применения современной техники, обладающей большими возможностями по отношению к традиционно применяемой, при выполнении строительно-монтажных работ, обеспечивает решение самых амбициозных задач освоения территории крайнего севера как при строительстве промышленных инженерных сооружений так и при возведении объектов жилищного строительства, обеспечивающих высокие требования комфортности проживания и бытового обслуживания первопроходцев, осваивающих эти труднодоступные территории. Примером реального-пионерного решения подобного строительства является сооружения плавучей атомной тепловой электростанции (ПАТЭС) в зоне г. Певек (рис.1). Береговая зона порта Певек расположена на многолетнемерзлых породах (ММП) грунтов основания, глубиной залегания - от 50 до 70 м., поэтому рациональным решением освоения территории здесь, является доставка сюда, морскими судами, отдельных готовых строительных модулей, на основе которых и собирается объект строительства (рис.2).

Отличительной особенностью ПАТЭС имеющей высокий уровень ответственности (повышенного класса сооружения – 1) является: необходимость обеспечения всех заданных требований нормальной эксплуатации включая и требование обеспечение

удержания энергоблока на месте стоянки при экстремальных внешних воздействиях повторяемостью один раз в 10000 лет. Доставляемые морскими судами модули, в зависимости от их строительного назначения могут иметь как относительно небольшие размеры (рис.3) так могут быть и крупногабаритными (рис.4)

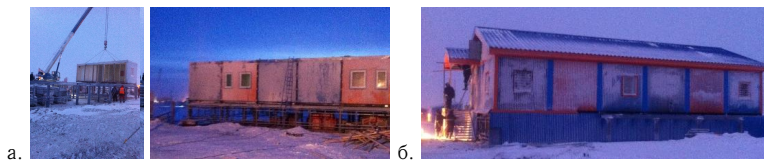


Рис. 3. Установка модулей, небольших размеров, на опоры: а. Процесс сборки; б. Бытовое строение, собранное из модулей



Рис. 4. Крупногабаритное промышленное сооружение

В условиях наибольших силовых воздействий со стороны моря на строения, вызванных ветровым давлением, подводным течением моря и другими силовыми факторами, полный учет их силового воздействия на строения комплекса сооружений береговой зоны, работающих совместно: затруднителен. Поэтому способ освоения территории береговой зоны, путем намыва песка на побережье, является наиболее предпочтительным. В этом случае, передача нагрузок от возводимых сооружений на основание (либо дно моря) может быть выполнена с использованием трубобетонных элементов (ТБЭ) (рис.5).



Рис. 5. Применение ТБЭ для передачи нагрузок на ММП

В практике применения ТБЭ известно, что они могут иметь различное поперечное сечение, однако, как показали выполненные нами исследования [1], наибольшей несущей способностью обладают ТБЭ круглого сечения, принятые в качестве рекомендуемых для применения. При установке ТБЭ в рабочее-проектное положение первоначально выбуривается скважина в ММП затем, в нее погружается ТБЭ (рис.6.)

В связи с тем, что работа ТБЭ в ММП малоизучена необходимы их натурные



Рис. 6. Установка ТБЭ в проектное положение в ММП

испытания проводимые непосредственно на площадках строительства, методом статического нагружения пробной внешней нагрузкой (рис.7)



Рис. 7. Определение несущей способности ТБЭ в ММП

В период сезонного оттаивания грунтов их свойства изменяются, поэтому снижение их прочностных характеристик должно быть учтено в расчетах на основе установления более высокого коэффициента надежности грунтов, либо требуется - дополнительное увеличение глубины погружения ТБЭ в ММП для сохранения необходимой несущей способности свай, при этом значительно увеличивается расход материалов и стоимость выполняемых работ нулевого цикла. При оптимизации конструктивного решения выполнения свайных работ необходим правильный выбор типа применяемых свай: в случае их использования в намывных грунтах, когда на сваи передаются усилия от вертикальных нагрузок строительного сооружения и крутящих моментов от штормовых ветровых воздействий и морских давлений: целесообразно применение свай на основе ТБЭ, с учетом предлагаемого нами дальнейшего совершенствования конструктивного решения [2.]. В случае строительства сооружений на ММП при незначительных: вертикальных усилий и крутящего момента, возможно применение буроинъекционных сваи типа ЭРТ, изготавливаемых по передовым: электроразрядным технологиям. Устройства свайного поля предлагаемым образом приводит к снижению стоимости в 2 и более раза по отношению к стоимости работ нулевого цикла, выполняемой на основе применения забивных и буровых свай (рис.8,9) [3,4.].

Доставку поступающих морским путем готовых строений, к месту их последующей



Рис. 8. Устройство буровых свайных фундаментов на основе ТБЭ: а – Строительство сооружений на намывных грунтах. Сваи из ТБЭ; б – Штормовое ветровое воздействие; в – Морские давления

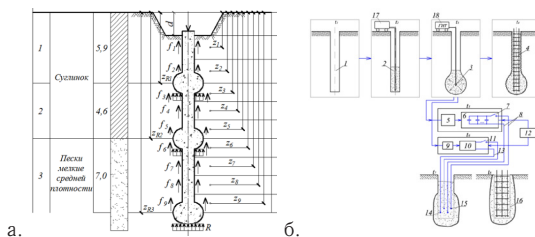


Рис. 9. Устройство буровых свайных фундаментов на основе ТБЭ: а – Строительство сооружений на намывных грунтах. Сваи из ТБЭ; б – Штормовое ветровое воздействие; в – Морские давления

эксплуатации, в условиях длительной полярной ночи, целесообразно осуществлять методом передвижки сооружений (рис.10).



Рис. 10. Передвижка строений от пристани разгрузки до места стоянки

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиренков А.Н. Исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) трубобетонных элементов различного поперечного сечения в условиях объёмного сжатия. / А.Н.Жиренков // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материал V Всероссийской конференции НАСКР-2005. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, г. Чебоксары. 2005. – 336 с.
2. Жиренков А.Н. О сохранении требуемой эксплуатационной надежности тяжелого бетона в сооружениях из трубобетона / И.И.Масленникова, А.Н. Жиренков // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы IV Международной (X Всероссийской конференции) «Новое в архитек-

- туре, проектировании строительных конструкций и реконструкции (НАСКР- 2018)». Изд-во Чуваш. ун-та, г.Чебоксары.2018.- С. 366 - 375.
3. Соколов Н.С. Свая-ЭРТ изготовленная по электроразрядной технологии / Н.С. Соколов, С.С. Викторова, Г.М. Смирнова, Г.Н. Алексеева, И.П. Федосеева // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы IV Международной (X Всероссийской) конференции НАСКР-2018. Изд-во Чуваш. ун-та, г. Чебоксары. 2018. – С. 464 - 472.
 4. Соколов Н.С. Выбор типа буровых свай по технико-экономическим параметрам / Н.С. Соколов // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы IV Международной (X Всероссийской) конференции НАСКР-2018. Изд-во Чуваш. ун-та, г. Чебоксары. 2018. – С. 430 - 438.

ЖИЛИЩНОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО В ХАНТЫ-МАНСЬКОМ ОКРУГЕ – ЮГРЕ — ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ МЕСТНОЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ

Усов А. В.
г. Сургут

Отмечена актуальность развития жилищного строительства на территории ХМАО-Югры на современном этапе. Рассмотрена специфика развития строительной отрасли в округе с учетом территориального распределения источников минерального сырья, поставщиков материалов и потребителей строительных материалов и продукции. Проанализирована доля затрат на поставку материалов в стоимости строительной продукции. Намечены основные направления по развитию производства как традиционных, так и перспективных строительных материалов на территории ХМАО-Югры.

Ключевые слова: жилищное строительство, производство строительных материалов, транспортные расходы.

HOUSING CONSTRUCTION IN KHANTY-MANSIYSK AUTONOMOUS OKRUG – YUGRA, THE TASK OF DEVELOPMENT OF THE LOCAL CONSTRUCTION INDUSTRY

Usov A. W.
Surgut

Keywords: housing construction, production of building materials, transportation costs.

Одним из национальных проектов по двенадцати направлениям стратегического развития, установленных Указом Президента России от 7 мая 2018 года №204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года» является национальный проект «Жильё и городская среда». При этом поставлена цель добиться увеличения объема жилищного строительства не менее чем в полтора раза. Не менее важно решение задачи обеспечения устойчивого сокращения непригодного для проживания жилищного фонда.

Реализация этих задач на территории Ханты-Мансийского автономного округа-Югры тем более актуальна, что общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя округа (средняя обеспеченность жильем) существенно ниже, чем в среднем по РФ:

- в среднем по России (2016 г) - 24,4 м²/чел

- по ХМАО – Югре - 20,8 м²/чел

Следует отметить значительное расхождение обеспеченности в различных муниципальных образованиях округа – при относительно высоком значении 27-28 м²/чел на западе, наименьшая обеспеченность (15-18 м²/чел) отмечается в восточной и центральной части округа.

Также остается довольно большой доля ветхого и аварийного жилищного фонда в общем объеме жилищного фонда - 7,7 % и 1,8 %, в котором проживали (по состоянию на 2017 г.) 110 тыс. и 29 тыс. человек соответственно.

Нормативами градостроительного проектирования ХМАО-Югры (Табл.18 [3]) установлена величина уровня средней жилищной обеспеченности в размере 30 м² общей площади жилых помещений на одного человека. Такой показатель в соответствии с документами территориального планирования может быть достигнут в ХМАО-Югре к 2035 году при условии существенного увеличения объемов жилищного строительства. На реализацию этой задачи направлена Государственная программа Ханты-Мансийского автономного округа – Югры «Развитие жилищной сферы», в соответствии с которой планируется:

- увеличение общего объема ввода жилья с 0,8125 до 1,001 млн. кв. м в год;
- сохранение коэффициента доступности жилья (количество лет, необходимых семье, состоящей из трех человек, для приобретения стандартной квартиры общей площадью 54 кв. метра с учетом среднего годового совокупного денежного дохода семьи) на уровне 1,8;
- увеличение общей площади жилых помещений, приходящихся в среднем на 1 жителя с 20,8 до 24,2 кв. м

Специфика развития строительной отрасли на территории ХМАО-Югры состоит, с одной стороны в использовании традиционных технологий, материалов, конструктивных решений, применяемых на территории страны повсеместно, и в практически полном отсутствии сложившейся индустрии производства основных строительных материалов, с другой стороны. В результате, при достаточно больших объемах строительного производства на территории округа, практически все необходимые объемы строительных материалов завозятся с предприятий, расположенных в иных субъектах РФ. Транспортные коридоры, по которым поставляются строительные материалы с предприятий Свердловской, Тюменской, Челябинской, Омской областей представлены на рисунке 1 [4]. При этом протяженность маршрутов доставки материалов и изделий составляет от 800 до 1200 км., что, очевидно, существенно сказывается на итоговой стоимости материалов для потребителей в ХМАО-Югре, что в свою очередь значительно повышает стоимость строительной продукции, создаваемой на территории округа.

Таким образом, одной из главных задач, направленных на реализацию национального проекта на территории округа, является максимальное приближение сырьевой базы и строительной индустрии к фронту производства строительно-монтажных работ и, как следствие - снижение стоимости конечной продукции.

Решение указанной задачи в условиях ХМАО-Югры имеет свои специфические особенности. При этом главная особенность – наличие на территории округа, прежде всего в крупнейших городах – Сургуте и Нижневартовске, развитых мощностей предприятий строительной индустрии – сборного железобетона, товарного бетона, производства металлоизделий и др., при том, что ближайшие источники основных компонентных материалов для производства находятся на расстоянии не менее 1000 км. Причем большую часть в общей весовой массе завозимых материалов составляют инертные материалы – щебень и песок, конструкционный и арматурный металлопрокат. Ситуация усугубляется в условиях объективного отсутствия на территории округа минеральных



Рис. 1. Фрагмент карты географического и макроэкономического положения Ханты-Мансийского автономного округа – Югры [4]

источников для производства цемента, конструкционных металлов с одной стороны, и крайне неравномерным распределением имеющихся потенциальных источников сырья для инертных и перспективных композитных строительных материалов и сложившейся системы предприятий строительной индустрии. Если основные производственные мощности и территории с наибольшим потреблением строительных материалов расположены в центральной и восточной зоне округа, то практически все перспективные источники минерального сырья расположены в северо-западной зоне ХМАО-Югры. Причем наиболее перспективные – в мало освоенной зоне Приполярного Урала. При таком взаимном размещении источников и потребителей, критическими становятся существующие инфраструктурные ограничения – в первую очередь транспортные. При относительно сопоставимом размере транспортного «плеча» (600-1000 км.) потребуются значительные усилия по развитию возможностей транспортного коридора «Приполярный Урал - восток ХМАО» для достижения реальной конкуренции с транспортным направлением «Тюмень – ХМАО».

По данным, размещенным в рабочих материалах к Стратегии социально-экономического развития Ханты-Мансийского автономного округа – Югры до 2020 года и на период до 2030 года [2] (Таблица 1) нами проведен анализ потребления основных строительных материалов на территории округа.

Проведенный сравнительный анализ отпускной стоимости производителя и стоимости материалов для конечного потребителя в ХМПО-Югре показал по многим потребляемым на территории округа строительным материалам исключительно высокую транспортную и посредническую составляющую в общей структуре стоимости материала для конечного потребителя в округе. Так превышение стоимости отдельных видов материалов (цемент, щебень, кирпич, минеральная плита) на территории округа над отпускной стоимостью производителей, находящихся в Свердловской, Омской, Тюменской областях составило от 50 % для кирпича до 300 % для щебня (Таблица 2).

Таблица 1

Годовой объем основных строительных материалов, использованных на
строительство жилья в муниципальных образованиях ХМАО

№ п/п	Муниципальное образование	Цемент, т	Щебень, м³	Песок, м³	Кирпич, тыс. шт.	Блоки, м³	Деревянные панели, м²	Керамзит, м³	Миниплита, м²	Пенопласт, м³	Плоскостной материал, м²	Окна, двери ПВХ	Окна, двери деревянные
1	г. Ханты-Мансийск	28 505,8	85 906,4	107 991,1	2 738,0	29 236,2		319,6	23 289,7	1 630,7	11 648,0	14 557,0	20 184,2
2	г. Когалымы	2 895,3	6 358,1	5 501,1	591,1	0,0		149,7	1 024,4	0,0	736,1	0,0	4 675,2
3	г. Лангас	2 684,4	10 774,7	19 489,7	118,8	4 429,8		36,4	2 238,9	282,1	1 275,2	1 708,3	2 509,9
4	г. Медвен	6 257,3	15 318,8	16 036,5	990,4	3 453,7		121,1	3 987,8	187,0	896,5	2 533,4	3 307,7
5	г. Нефтеюганск	11 755,2	26 651,9	24 207,1	1 977,0	4 680,6		188,5	9 251,3	218,8	5 671,5	4 895,5	7 749,5
6	г. Нижневартовск	38 438,7	85 548,5	78 565,1	7 881,1	4 536,0		1 674,7	14 118,9	408,7	4 748,9	3 661,8	48 620,3
7	г. Нягань	9 164,8	18 673,6	18 930,3	2 842,9	1 095,3	2 674,0	133,3	3 510,3	565,8	1 687,4	2 618,0	6 052,2
8	г. Покачи	2 738,0	5 963,8	5 036,0	412,6	1 061,8		53,5	1 995,1	7,9	452,7	1 194,9	913,8
9	г. Пыть-ях	5 208,2	14 773,3	17 653,0	748,5	3 241,8		182,0	2 809,3	222,0	2 059,1	1 043,8	7 664,9
10	г. Радужный	644,0	2 300,1	3 190,4	45,9	855,6		2,3	703,5	61,0	841,8	327,3	1 057,7
11	г. Сургут	97 897,6	207 702,9	187 791,4	22 217,2	12 818,2	7 408,0	3 148,4	41 685,9	1 960,7	12 125,1	19 785,5	89 292,7
12	г. Урай	8 752,1	22 809,7	27 543,3	1 747,2	6 132,8	646,0	74,5	4 961,8	615,6	1 098,7	3 951,3	3 900,3
13	г. Югорск	8 942,3	31 481,2	44 393,1	544,4	12 644,6	6 500,0	56,9	7 811,8	797,2	4 946,1	4 978,2	8 322,8
14	р-н Белоярский	4 192,1	9 996,1	9 200,5	582,8	1 914,3	2 170,0	69,4	3 881,8	57,6	3 253,7	1 754,6	3 910,1
15	р-н Березовский	3 262,5	13 069,1	25 127,1	215,1	5 215,2		51,6	2 493,2	351,1	1 185,7	2 119,8	2 684,7
16	р-н Кондиський	5 793,5	21 026,9	30 783,9	420,9	8 730,8		21,1	4 689,5	617,1	2 701,2	3 282,8	5 131,7
17	р-н Нефтеюганский	7 041,8	20 548,5	24 711,6	723,2	6 357,2		95,0	6 068,3	341,4	4 170,2	3 311,3	6 410,9
18	р-н Нижневартовский	5 756,1	16 278,7	19 599,5	838,6	3 643,4		203,8	2 821,5	249,5	1 503,6	1 173,1	7 821,9
19	р-н Октябрьский	6 445,5	20 028,0	26 631,2	831,0	6 649,8		78,6	4 465,6	507,0	2 537,4	2 873,1	5 881,5
20	р-н Советский	11 664,7	31 122,3	31 205,7	1 283,2	6 794,7	6 100,0	162,1	13 667,1	269,0	17 019,1	4 772,9	18 687,5
21	р-н Сургутский	23 232,6	49 907,8	42 662,3	4 306,2	6 050,0		577,6	14 322,9	238,7	5 064,5	7 602,2	15 200,7
22	р-н Ханты-Мансийский	3 276,9	13 738,4	21 678,6	59,5	6 484,8	230,0	0,0	2 736,7	444,1	1 374,5	2 087,9	3 049,9

Таблица 2

Превышение стоимости потребляемых материалов на территории ХМАО-Югры
по отношению к отпускной стоимости

Материал	Потребление	Стоимость заводская тыс.руб.	Стоимость с доставкой в ХМАО, тыс. руб	Превышение стоимости, тыс.руб. %	
Цемент	294 549 т.	974 173	1 740 296	766 123	78
Щебень	729 979 м³	250 018	1 135 117	885 099	354
Кирпич	52 116 тыс.шт.	664 474	990 196	325 722	49
Мин.плита	172 535 м³	374 873	634 067	259 194	69
Итого		2 263 538	4 499 676	2 236 178	

При сопоставлении общих объемов потребляемых строительным комплексом ХМАО-Югры материалов с анализируемыми стоимостными показателями следует отметить значительные затраты на транспортные и посреднические услуги в общих затратах при строительстве объектов на территории округа. Так, только по указанным выше четырем позициям материалов общая сумма затрат на рассматриваемые услуги в абсолютном выражении составляет не менее 2,2 млрд. руб. в год. Таким образом, можно констатировать, что в результате сложившихся территориальных особенностей,

излишне большая доля капитальных вложений расходуется на непроизводственные цели и при определенных условиях могла бы быть существенно сокращена.

В связи с тем, что в соответствии с планами по реализации национальных проектов и Стратегии развития ХМАО-Югры жилищное строительство остается приоритетным видом строительства на территории округа на ближайшие десятилетия, важнейшей задачей является обеспечение строительства относительно недорогими и доступными материалами с максимальным использованием минерально-сырьевого и производственного потенциала округа. Для этого, прежде всего, необходимо развитие производства на территории ХМАО-Югры традиционных материалов.

В части использования традиционных материалов наиболее перспективны:

освоение скальных пород горного Урала для производства щебня из гранитов, известняков для цемента и габбро-базальтоидов для минеральной ваты, выявление и разработка промышленных залежей стекольных песков с целью организации производства листового флоат-стекла;

наращивание запасов и производства песчано-гравийной смеси;

освоение месторождений кремнисто-опалового сырья (диатомиты, опоки) для производства теплоизоляционных материалов, легковесного строительного кирпича, добавок к белым цементам, адсорбентов и высокочистых кремниевых концентратов;

выявление и освоение месторождений кирпичных глин для организации производства кирпича керамического.

Конкурентноспособность в настоящее время местных предприятий по производству щебня представляется сомнительной ввиду большой удаленности от мест потребления при отсутствии соответствующей транспортной инфраструктуры. Таким образом, развитие автодорожного сообщения Полярный Урал – центр ХМАО должно стать одним из стратегических приоритетов развития округа. Также следует отметить необходимость возрождения маршрутов доставки материалов по водным путям сообщения. На наш взгляд, речной транспорт по рекам Обь, Иртыш, Северная Сосьва может и должен стать одним из основных вариантов доставки строительных материалов по территории округа. Но это станет возможным при целенаправленном создании необходимой береговой инфраструктуры в местах производства и потребления материалов.

Причем следует говорить как об использовании уже традиционных конструкций, так и о разработке принципиально новых композитных материалов и конструкций, обладающих особыми эксплуатационными характеристиками (высокая прочность, коррозионная стойкость, гидрофобность, легкость, тепло и огнестойкость, устойчивость к агрессивным средам, звукопоглощение), при условии приоритетного развития именно местной сырьевой базы, необходимой транспортной инфраструктуры и соответствующих производственных мощностей. Актуальность максимального приближения добывающих и производственных мощностей строительной индустрии непосредственно к объектам строительства усиливается при учете развивающегося промышленного освоения Арктической зоны ЯНАО.

Несмотря на то, что ХМАО-Югра входит в число лидеров среди субъектов Российской Федерации, наиболее обеспеченных лесосырьевыми ресурсами, особо следует обратить внимание на недостаточно раскрытый потенциал использования продукции лесопромышленного комплекса округа в производстве строительных конструкций и материалов с применением древесины и продуктов ее переработки.

В соответствии с Государственной программой «Развитие лесного хозяйства и лесопромышленного комплекса Ханты-Мансийского автономного округа – Югры на 2016 - 2020 годы»[5] расчетная лесосека в автономном округе составляет 39,6 млн. м3, в том числе по хвойному хозяйству - 20,1 млн. м3. За последние 5 лет использование

расчетной лесосеки составляло в среднем 7,6% с объемом заготовки 2,2 млн. м3. Налицо возможность существенного увеличения объемов заготовки при формировании соответствующего спроса на продукцию организаций лесоперерабатывающей промышленности. Несмотря на то, что в округе в настоящее время существуют предприятия по производству древесноволокнистых плит (ДВП), клееной фанеры, бруса ЛВЛ, тем не менее объемы производства этих изделий не велики, а основной объем производства этих предприятий составляют пиломатериалы, которые в свою очередь в основном реализуются за пределами округа.

Мероприятия госпрограммы [5] предусматривают предоставление субсидий из бюджета автономного округа на производство ДВП, клееной фанеры, бруса ЛВЛ, на их реализацию, а также на производство готовых объектов деревянного домостроения и их реализацию. Тем не менее использование продукции лесоперерабатывающей промышленности ХМАО-Югры в строительстве явно не соответствует потенциальным возможностям. Среди причин такого состояния дел следует отметить недостаточный уровень развития высокотехнологичных производств по глубокой механической, химической и энергетической переработке древесного сырья, а также отсутствие на территории округа широкой практики проектирования и строительства объектов, как массового применения, так и с уникальными объемно-планировочными решениями. Одной из эффективных мер по стимулированию развития производства деревянных строительных конструкций и изделий могло бы стать целенаправленное проектирование и строительство социальных объектов в рамках реализации государственных программ на территории округа с обязательным их использованием.

В результате рассмотрения проблемы можно сделать следующие выводы:

1. Расходы на доставку строительных материалов и изделий для строительства на территории ХМАО-Югры значительно удоражают стоимость строительной продукции, что, в частности, приводит к повышению стоимости нового жилья.
2. Возможности развития производства традиционных строительных материалов и изделий на основе источников сырья на территории округа ограничиваются территориальной удаленностью от основных мест потребления и неразвитостью транспортной инфраструктуры на территориях потенциальной добычи.
3. Следует обратить внимание на разработку принципиально новых композитных материалов и конструкций с использованием местных материалов и сырья с их опытным изучением и внедрением.
4. Необходимо всемерно расширять использование продукции лесопромышленного комплекса округа в производстве строительных конструкций и материалов с применением древесины и продуктов ее переработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Указ Президента России от 7 мая 2018 года №204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года»
2. Распоряжение Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 09 июня 2017 года № 339-рп «О внесении изменений в распоряжение Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 22 марта 2013 года № 101-рп «О стратегии социально-экономического развития Ханты-Мансийского автономного округа – Югры до 2020 года и на период до 2030 года».
3. Постановление Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 29 декабря 2014 года № 534-п «Об утверждении региональных нормативов градостроительного проектирования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры»

4. Постановление Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 26 декабря 2014 года № 506-п «Об утверждении Схемы территориального планирования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры» (с изм.).
5. Постановление Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 9 октября 2013 года № 425-п Государственной программой «Развитие лесного хозяйства и лесопромышленного комплекса Ханты-Мансийского автономного округа – Югры на 2016 - 2020 годы» (с изм.).

КОМПОЗИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ В СОВРЕМЕННОЙ АРХИТЕКТУРЕ

Славгородский С. А.

г. Сургут

Отмечена взаимосвязь архитектурных форм и строительных материалов. Рассмотрено применение новых инновационных композитных материалов в современной зарубежной архитектуре. Обозначены проблемы применения композитов в России.

Ключевые слова: архитектура, композитные материалы.

COMPOSITE MATERIALS IN MODERN ARCHITECTURE

Slavgorodskiy S. A.

Surgut

The interrelation of architectural forms and building materials is noted. The use of new innovative composite materials in modern foreign architecture is considered. The problems of using composites in Russia are indicated.

Keywords: architecture, composite materials.

Разнообразие материалов позволяет архитектуре обрести свою вещественную форму, определяет возможность осуществить творческий замысел.

Материал и конструктивная форма всегда находятся в тесной взаимосвязи. Внешний вид, объём, и его форма могут заметно изменяться с учётом возможности использования определённого материала, однако в современных условиях проявляется и обратная связь – создание и развитие архитектурных форм даёт развитие производству материалов с заданными характеристиками.

Эмоциональное воздействие архитектурной формы связано с фактурой, цветом и текстурой поверхности материалов. Эстетические свойства материалов позволяют усилить, развить и акцентировать художественную идею проекта.

С психологической точки зрения важны и сложившиеся представления человека о таких эксплуатационно-технологических свойствах материалов, как прочность, надёжность и долговечность.

Экономические показатели архитектурно-строительной, реставрационной деятельности и дизайна в значительной степени связаны с применяемыми материалами, при этом до 50% стоимости современной конструкции приходится на стоимость материалов, которую следует оценивать с учётом будущих эксплуатационных расходов.

Сегодня материал является мощным стимулом развития современной архитектуры.

Композиты использовались в течение уже более 50 лет в различных жилых и коммерческих зданиях, но не приобрели такого статуса, как традиционные изделия из

дерева, алюминия, стали, камня и железобетона. Препятствием для внедрения композитов являются, как объективные факторы: высокая стоимость, отсутствие строительных норм и методик расчета таких конструкций, так и сложившиеся субъективные представления заказчиков и строителей в отношении традиционных строительных материалов хорошо им знакомых.

В последние годы у архитекторов, а через них и у заказчиков, приходит понимание новых возможностей и свойств композитов, для их творческого использования.

Из-за высокой стоимости сырья углеродное волокно, как правило, используется при изготовлении мелких вещей или более крупных изделий, где отношение прочности к весу перевешивает любые расходы-например, в аэрокосмической промышленности, гоночных лодках или деталях роскошных автомобилей.

Углеродное волокно используется в строительстве в инженерных целях, например при необходимости укрепить такую конструкцию, как мост, где стоимость материала уже не так велика по сравнению с альтернативой: перестроить всю конструкцию.

Стекловолоконный композит широко используется во многих архитектурных приложениях, от компактных переносных укрытий до крупномасштабных многоэтажных фасадов.

Примером может служить крыша театра в новом кампусе Apple в Силиконовой долине [1]. Считается, что это самая большая самонесущая крыша из углеродного волокна, когда и где-либо построенная. Крыша немного похожа на летающую тарелку, имеет диаметр около 47 метров и весит 80 тонн. Кажется, что это много для углеродного волокна, но если сравнить с бетонной крышей такого диаметра и толщиной всего 15 см, и то при условии, что такая крыша может выдержать собственный вес, что маловероятно, то и тогда она будет весить приблизительно 540 тонн, что почти в 7 раз больше.

Крыша состоит из 44 радиальных панелей, каждая длиной немного более 23 м. Они были сделаны компанией PCT из ОАЭ и сначала были собраны и испытаны на заводе. Затем они были разобраны, отправлены на рабочую площадку в Калифорнию, где были подняты и установлены на стеклянные стены вестибюля театра.

Покрытие опирается на стеклянный цилиндр высотой семь метров, состоящий из стеклянных панелей, каждая из которых состоит из четырех слоев толщиной 12 миллиметров, которые удерживают крышу без какой-либо дополнительной поддержки. Это самая большая конструкция в мире, опирающаяся исключительно на стекло.

Сам театр площадью около 11000 квадратных метров находится под землей и стеклянным вестибюлем, и рассчитан на 1000 человек. Именно здесь Apple проводит презентации новых продуктов.

Apple имеет много нововведений, имеющих всемирное и историческое значение. Теперь, возможно добавить к списку доказательство того, что крупномасштабное строительство из углеродного волокна может, при некоторых обстоятельствах, иметь смысл.

Высокоскоростная железная дорога Харамейн - это крупный инфраструктурный проект Королевства Саудовская Аравия, соединяющий города Мекку и Медину [2].

Крыша зала станции Медина-Стейшн построена в форме зонтиков с зеленой черепицей, придающей ей замечательный и привлекательный вид. Конструкция крыши зала состоит из 41 панели с повторяющимся рисунком, которые соединяются вместе, образуя один большой квадратный модуль 27 x 27 метров. Каждая панель должна быть конструктивно легкой, огнестойкой, устойчивой к экстремальным температурам и погодным условиям, а также простой в установке.

Конструкция спроектирована таким образом, чтобы использовать как можно больше естественного света. Для этого панели крыши имеют уникальные ромбовидные

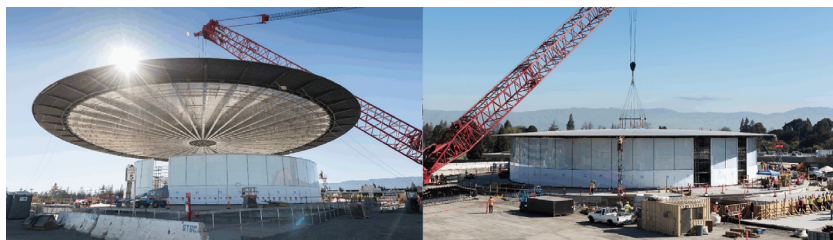


Рис. 1. *Монтаж крыши театра компании Apple в Купертино*

окна в крыше. Композитная крыша имеет подвесной внутренний потолок из сегментов зеленого анодированного алюминия со специальным рельефным перфорированным рисунком и фиксированными антибликовыми ламелями с высокой отражающей способностью (минимум 95%). Стеклопакеты в крыше оснащены антибликовой системой для улучшения распределения света внутри станции и устанавливаются в формованное углубление после сборки крыши.

Крыша конструктивно построена из огнестойкого композита из стекловолокна и эпоксидной смолы в сочетании с легким пенопластовым сердечником и отделана снаружи стеклянной мозаикой. Всего было произведено 1312 таких панелей, чтобы выполнить покрытие крыши в Медине площадью 226400 м².



Рис. 2. *Композитная крыша для высокоскоростной железнодорожной станции Аль-Харамейн*

Башня с часами-это шедевр инженерного искусства и дизайна, разработанный командой специалистов из Европы и всего мира. [3]

Часы Доха с диаметром циферблата 43 метра являются самыми большими часами в мире. С высоты более 400 метров они видны из всех районов Мекки, на расстоянии более восьми километров, и являются настоящим украшением Священного города.

В качестве ведущего поставщика крупных композитных компонентов была выбрана компания РСТ для решения задачи по строительству верхних 370 метров облицовки, а также циферблатов, которые должны были быть выполнены из легких композитных материалов, поскольку их необходимо было поднять почти на высоту 400 метров.

Общая высота башни составляет 601 метр, что делает ее второй по высоте башней в мире, второй после Бурдж-Халифы в Дубаи.

Фасад часов выполнен из 260000 м² самого передового композитного материала. Это одно из самых больших применений композитных материалов в мире.

Часы имеют четыре циферблата, два из которых имеют диаметр 43 метра, при этом минутные стрелки имеют длину 22 метра, а часовые стрелки - 17 метров. Вес часовой

стрелки составляет всего 6 тонн.

Каждая композитная панель покрыта 98 миллионами стеклянных мозаичных плиток и сусального золота. Два миллиона светодиодных светильников встроены в фасады и циферблаты часов, для освещения в ночное время.

Из-за ограничений по весу стрелки часов представляют собой самонесущую конструкцию из углеродного волокна.

Когда звучит призыв к молитве, верх башни освещается 21 000 белых и зеленых сверкающих огней. Эти ослепительные огни видны в 30 км от башни, что полезно для людей с нарушениями слуха и находящихся на большом расстоянии от мечети. Призыв к молитве транслируется в прямом эфире с верхней части башни через специально разработанную систему громкоговорителей. Его можно услышать в радиусе до 7 км от башни.

Композитный полумесяц, построенный из карбона и стекловолокна, стоит на самой вершине башни и имеет диаметр 23 метра, что делает его самым большим серпом из когда-либо построенных.

Инженеры спроектировали полумесяц так, чтобы он был самонесущим и не нуждался в стальной конструкции, что позволило как можно ниже уменьшить вес. Полумесяц построен аналогично парусной лодке со структурными композитными рамами, похожими на переборки внутри яхты.

Что интересно, внутри полумесяца есть полностью укомплектованное жилое пространство, которое состоит из 4 этажей используемое для молитв и отдыха, 2 этажа располагают офисом, кухней и ванной комнатой.



Рис. 3. Королевская башня с часами в Мекке

Национальный теннисный центр Билли Джин Кинг, созданный Американской теннисной ассоциацией в нью-йоркском районе Квинс, представляет собой большой кампус с несколькими стадионами для крупных теннисных матчей. [4]

Новый стадион Grandstand имеет частичное покрытие сверху, чтобы защитить зрителей от солнца.

Экстерьер нового стадиона отличается уникальным внешним рисунком, который метафорически вызывает иллюзию взглядывания в листву листьев. Материал играет с непрозрачностью и прозрачностью, предлагая проблески внутри и за пределами стадиона. Его инновационная оболочка изготовлена из покрытой тефлоном стекловолоконной мембраны и политетрафторэтиленовой (PTFE) ткани, прикрепленной к кабельной конструкции с параметрической геометрией. Фасад состоит из 486 панелей, площадью

более 26 000 квадратных футов, которые были спроектированы с помощью программного обеспечения для оптимизации конструкции и дизайна.

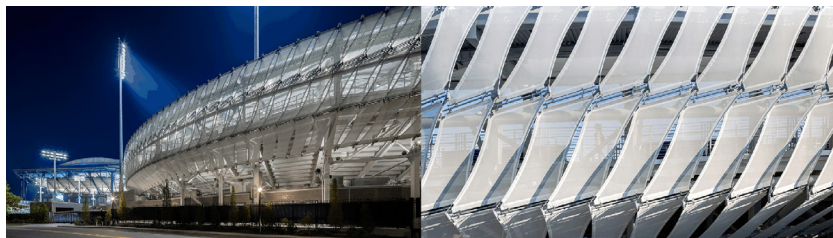


Рис. 4. Национальный теннисный центр Билли Джин Кинг

Испанская компания по производству бутилированной воды с прозаичным названием H2O хотела, чтобы их штаб-квартира в Барселоне была узнаваемой [5]. Но как именно средствами архитектуры передавать идею воды?

Интересное решение предложила нью-йоркская архитектурная фирма Axis Mundi. Они выбрали открытую воду в дикой природе. Рябь часто намного сложнее, чем простые волны. В естественной среде они часто состоят из наборов волн, движущихся с разных направлений и пересекающихся. Затем максимумы и минимумы волн либо складываются, либо вычитаются друг из друга, создавая интерференционные паттерны.

В конечном итоге было выбрано визуально привлекательное изображение-едва заметная рябь в пруду. Это фотографическое изображение было импортировано и смоделировано в точную трехмерную форму, отражающую многочисленные волнообразные линии, которые затем поместили по периметру ограждающей конструкции здания.

Необходимо обратить внимание, что фенольная композитная оболочка здания H2O имеет не только рябь, но и разрывы в ней. Они открываются в основном вниз, поэтому не пропускают прямой солнечный свет, но допускают свободный воздушный поток.

Общий эффект получился водянистый и действительно отражает сущность компании.



Рис. 5. Головной офис компании H2O в Барселоне

В настоящее время доля применения композитов в строительстве в мире достигает 30% и постоянно растет. В России эта цифра значительно ниже: около 5%. Это связано не только с консервативной ментальностью, но и отсутствием государственной

политики и поддержки как научных исследований в этой сфере, так и недостаточным финансированием таких проектов.

Производство и внедрение современных композитных материалов особенно актуально для России – страны, обладающей огромными запасами углеводородного сырья, которое, к сожалению, не подвергается глубокой переработке.

На заседании Совета по модернизации экономики и инновационному развитию при Президенте РФ В.В.Путин сказал следующее: «И в заключение хотел бы отметить ещё один момент. Конечно, для изменения структуры экономики, для опережающего развития несырьевого высокотехнологичного бизнеса нам нужна качественно другая инвестиционная, предпринимательская среда» [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://www.eocengineers.com/en/projects/steve-jobs-theater-293>
2. http://www.pct.ae/composite_projects.php?project=17
3. http://www.pct.ae/composite_projects.php?project=1
4. <http://www.rossetti.com/grandstand-stadium-0>
5. <https://axismundi.com/architectural-design-projects#h2o-headquarters>
6. <http://kremlin.ru/events/president/news/16708>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВИХРЕТОКОВОЙ ДЕФЕКТОСКОПИИ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ ДЕТАЛЕЙ ТУРБОКОМПРЕССОРА ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дидин Г. А., Михеев П. В., Бухаров С. В., Лебедев А. К.

г. Москва

В данной работе исследуется возможность измерения интегральной дефектности изделия из углепластика на основе полиэфирэфиркетона. Исследовалась часть компрессора низкого давления воздушно-реактивного двигателя. Тонкостенная деталь выполнена методом прессования из листовой заготовки и имеет двойную кривизну. После изготовления исследовались свойства материала, качество изготовления, а также оценивался ресурс детали, путём циклирования на вибростенде. Показано, что методика вихретоковой дефектоскопии позволяет находить локальные отклонения структуры, и фиксировать микроразрушения материала при виброиспытаниях.

Ключевые слова: полимерный композит, РЕЕК, термопластик, компрессор, ресурс, анализ вихревых токов.

APPLICATION OF EDDY-CURRENT DEFECTOSCOPY FOR TESTING OF CFRP DETAILS FOR TURBOCOMPRESSOR

Didin G. A., Mikhayev P. V., Bukharov S. V., Lebedev A. K.

Moscow

In this work the possibility of measurement of integrated deficiency of a detail from CFRP with PEEK-matrix had been investigated. A part of the compressor of low pressure of the jet engine had been tested. The thin-walled detail was produced by pressing from plastic sheet and has double curvature. After production properties of material, quality of production were investigated as well as the details resource was by excitation at the

vibration in long time. It is shown that the technique of eddy-current defectoscopy allows to find local deviations of structure and to fix microdefects of modern CFRP at vibration tests.

Keywords: polymeric composite, PEEK, thermoplastic, compressor, resource, eddy-currents analysis.

Введение

Прогноз свойств композиционных материалов и оценка остаточного ресурса являются важнейшими задачами авиационного материаловедения. Это особенно важно, когда речь идет о безопасности гражданской авиационной техники. Для повышения весовой эффективности двигателя SaM 146 исследовалась возможность замены его металлических деталей на углепластиковые, изготовленные из листовых полуфабрикатов на основе полиэфирэфиркетона толщиной 1,2мм. В данном случае исследовалась внутренняя панель компрессора низкого давления.

Панели были подвергнуты циклированию на вибростенде с амплитудой 2мм.

До и после циклирования исследовалось поле электропроводности в разных точках детали, что отражает повреждаемость в ходе виброиспытаний [1,2].

Преимущество использования вихретокового дефектоскопа в данном случае в том, что он эффективнее, чем традиционный ультразвуковой метод работает с тонкостенными объектами. Кроме того, исследуемая деталь компрессора имеет большую кривизну, которая препятствует, эффективному прилеганию ультразвукового преобразователя, и при исследовании ультразвуковой метод обычно выявляет возникновение макрорасслоений материала, а вихретоковый контроль, фиксирующий аномалии локальной электропроводности [4,5], на наш взгляд, отражает интегральное изменение проводимости среды, свидетельствующее о дефектах типа нарушения фазовой структуры материала.

Разработанная методика устанавливает процедуру неразрушающего контроля вихретоковым методом изделий из полимерных композиционных материалов с армирующей системой на основе непрерывных углеродных волокон [6,7].

Проведение неразрушающего контроля вихретоковым методом позволяет выявить следующие виды дефектов:

- расслоение;
- непрочлеи;
- пористость;
- посторонние включения.

Эксперимент

В основе вихретокового метода контроля лежит индукция электрического тока в проводящем материале, возбуждаемая внешним переменным электромагнитным полем. Измеряемый и анализируемый параметр относится к распределению индуцированных токов, и фиксируется в виде амплитуды и фазы тока в приемной катушке датчика[8]. При переменном возбуждении он представляет собой вектор в комплексной плоскости. В углепластиках армирующая система определяет распространение вихревых токов в поверхности слоя, искажая картину поля в зависимости от схемы расположения волокон. В зависимости от применяемых преобразователей, возможно, достигнуть требуемой чувствительности, необходимой для диагностирования заданного изменения электропроводности [9].

Изготовление панели

Панель изготовлена методом прессования из препрега и показана на рис 1, всего изготовлено 5 панелей

Панели нагружались в резонанс в направлении перпендикулярном ее плоскости

Для анализа сигнала использовался вихретоковый дефектоскоп «Галс ВД-103» с датчиками 0,8мм и 3мм. Для фиксации датчика в отдельных точках детали ортогонально к поверхности были изготовлены кондукторы, повторяющие форму панели рис. 2

Материал – полимерный волокнистый слоистый композиционный материал, с армирующей системой в виде ткани полотняного плетения на основе углеродных полиакрилонитрильных волокон и матрицей на основе полиэфирэфиркетона - TPCL РЕЕК-4-40-НТА40 Е13 ЗК.

Число слоев ткани – 6, Общая толщина детали – 1,2 мм, Технология изготовления – прессование из листовых заготовок. Испытание на резонансном вибростенде

Предварительно были определены зоны максимальных отклонений от плоскости

Амплитуда по перемещению (до 2 мм), Механическая частота –582 Гц. При измерении определялись действительная и мнимая часть сигнала датчика в точках и с двух сторон схема контроля приведена на рис. 1. Деталь на кондукторе показана на рис.2

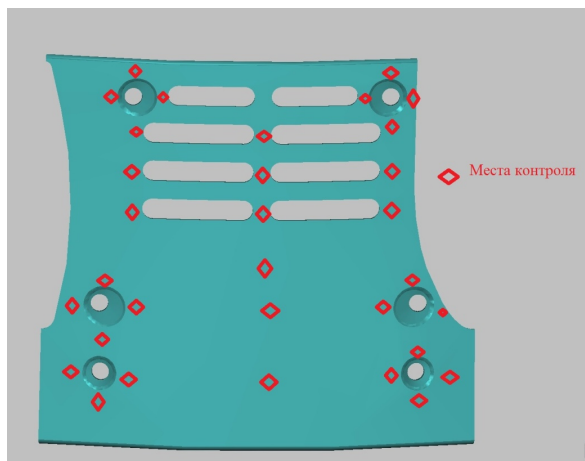


Рис. 1. Схема контроля детали компрессора

Датчики настраивались и проверялись на панели (Рис.3) – заготовке, отфрезерованной соответствующим образом. 4 ступеньки, минимальная соответствовала толщине исследуемой панели

Для общего контроля толщины использовался ультразвуковой толщиномер «Велограф-2»

На рис.4 представлен момент контроля детали вихретоковым дефектоскопом.

Результаты

Результаты измерений, усреднялись по 4 разным деталям до циклирования. Значение сигнала до циклирования усреднено по деталям 041, 058, 063, 044, значение сигнала после циклирования определено на детали 051. Усредненный по деталям 041, 058, 063, 044 действительный сигнал от восьми выбранных точек показан на рис. 5 мнимой части на рис. 6. Точки выбраны по расчетом максимальных отклонений.

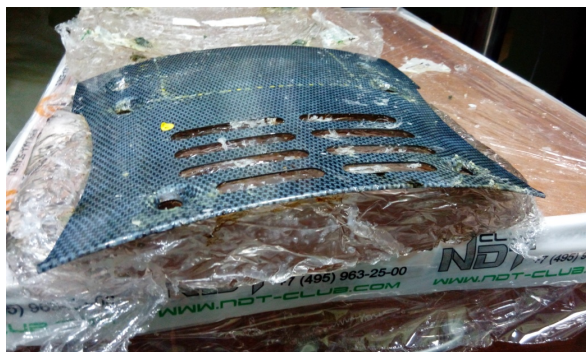


Рис. 2. Деталь с кондуктором для датчика

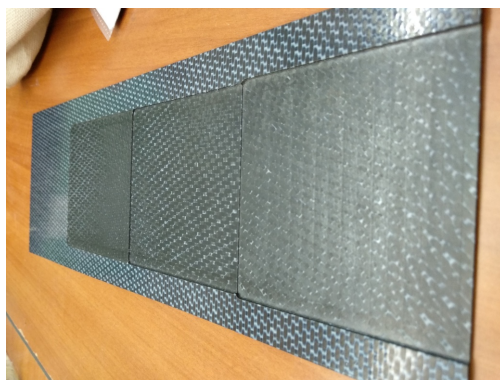


Рис. 3. Ступенчатая панель разной толщины для настройки датчика

Сравнение сигнала в точках Э1-Э4, выбранных как место наибольшей амплитуды колебаний по предварительному расчету. Действительная составляющая сигнала представлена на рис.7 на мнимая на рис. 8

Выводы

1. Показано что методика анализа поля вихревых токов может применяться при исследовании поврежденности слабопроводящего материала полиэфирэфиркетона;
2. Показано что методика может быть применена к детали гражданского авиадвигателя сложной формы
3. Анализ результатов показал изменение сигнала при циклировании, хотя эти изменения и не привели к изменению механических (резонансных) свойств детали
4. Методика может быть применена к прогнозу ресурса компрессоров, используемых при перекачке углеводородов

Некоторые результаты данной работы получены в рамках работ по договору от «28» февраля 2017 г. № 53160-02030 с дополнительным соглашением от «02» мая 2017г. №1

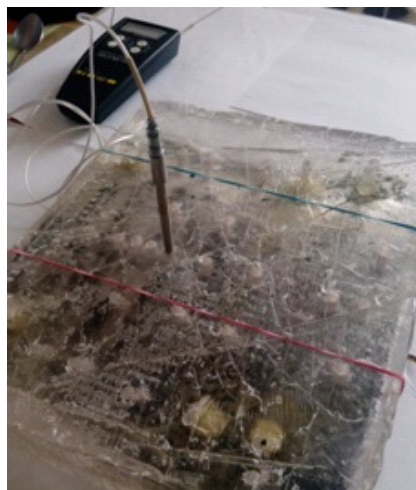


Рис. 4. Момент контроля

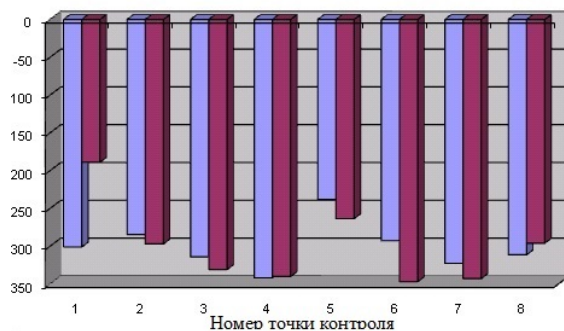


Рис. 5. Сравнение значение действительной части сигнала до и после циклирования по 8 точкам детали снаружи Справа до циклирования, слева после циклирования

«Разработка модернизированного компрессора низкого давления для двигателя российского регионального самолета».

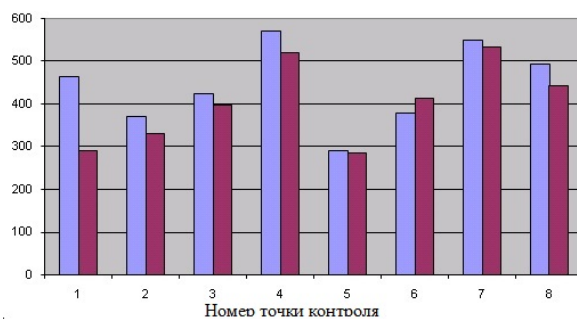


Рис. 6. Сравнение значение мнимой части сигнала до и после циклирования по 8 точкам детали снаружи. Справа до циклирования, слева после

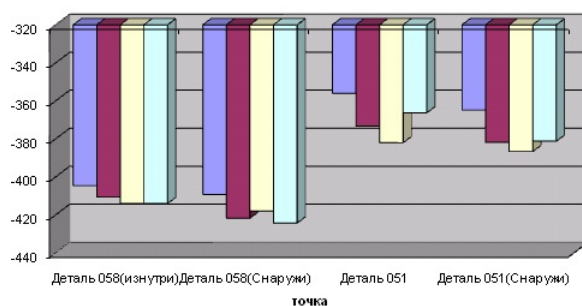


Рис. 7. Точки 21-24 деталей до циклирования 058 и после 051

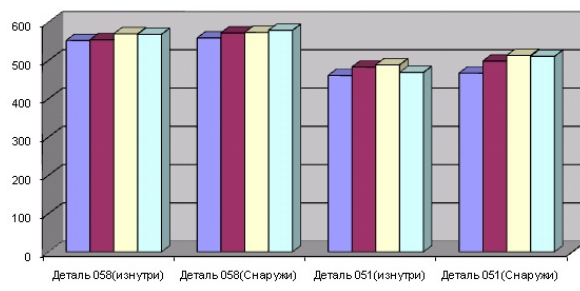


Рис. 8. Точки 21-24 деталей до циклирования 058 и после 051

ЛИТЕРАТУРА

1. Koyama K., Hoshikawa H. and Koiima G., "Eddy current non-destructive testing for carbon fiber-reinforced composites (CFRP)", Proceeding of the ASME 2010 Pressure Vessels and Piping Conference 2010.
2. Сясько В.А., Чертов Д.Н. Выявление расслоений углепластиковых материалов с использованием тангенциальных вихретоковых преобразователей .В мире неразрушающего контроля - 2012 - №2(56).- С. 9-21.
3. Dietrich Berger and Gisela Lanza .Development and Application of Eddy Current Sensor Arrays for Process Integrated Inspection of Carbon Fibre Preforms. Sensors 2018, 18(1), 4; doi:10.3390/s18010004
4. Bardl G., Nocke A., Cherif A., Pooch M., Schulze M., Heuer H., Schiller M., Automated detection of yarn orientation in 3D-draped carbon fiber fabrics and preforms from eddy current data, Composites Part B: Engineering 96, 312-324
5. Gäbler S., Heuer H., Heinrich G., Measuring and Imaging Permittivity of Insulators Using High-Frequency Eddy-Current Devices, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 64 (8), 2227-2238
6. Горынин Г.Л., Власко А.Ф. Математическое моделирование макрохарактеристик процесса теплопроводности для волокнистых материалов при расчете строительных конструкций на действие тепловых нагрузок // Вестник СибАДИ. - 2012. - вып. 3 (25). - С. 69-74.
7. Горынин Г.Л., Власко А.Ф. Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов при расчете конструкций транспортных сооружений // Вестник СибАДИ. - 2013. - вып. 1 (29). - С. 58-64.
8. Шкатов П.Н., Дидин Г.А., Мякушев К.В., Михеев П.В., Использование метода вихревых токов для дефектоскопии углепластиков, // Тезисы докладов XX Международной научно-технической конференции. ОАО "ОНПП "Технология МГТУ им. Н.Э. Баумана; под общей редакцией О.Н.Комиссара. 2013. С. 125-126.
9. П.В.Михеев, Г.А.Дидин, П.Н.Шкатов Использование метода вихревых токов для дефектоскопии конструкционных материалов на основе углеродных волокон», выступление на X Всероссийская конференция по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат» по тематике «Основные тенденции, направления и перспективы развития методов неразрушающего контроля в аэрокосмической отрасли» 09.02.2018

Авторский указатель

Zuojin Zhu, 147

А

Акулич А. В., 163

Афанаскин И. В., 62

Б

Бетелин В. Б., 14, 18, 188

Брагинский М. Я., 248

Бурыкин Ю. Г., 229, 248

Бухаров С. В., 322

Быковских Д. А., 185

Бычин И. В., 193, 236

Бычин И. В., 40

В

Власко А. Ф., 300

Вольпин С. Г., 62

Г

Гавриленко А. В., 225

Гавриленко Т. В., 41

Галиев И. М., 200

Галкин В. А., 30, 185, 188, 197, 260

Головина Н. Я., 263, 267

Гореликов А. В., 243

Гореликов А. В., 40, 193

Горленко Н. П., 283

Горынин Г. Л., 274, 292, 295, 300

Гришмановская О. Н., 261

Гришмановский П. В., 261

Губайдуллин А. А., 35

Губкин А. С., 35

Д

Девцын И. Н., 188, 217

Деев Г. Е., 67

Деркач И. П., 229

Дидин Г. А., 322

Дубовик А. О., 188, 197, 210

Дубовик О. А., 210

Душин В. Р., 115

Е

Еловой С. Г., 238, 240

Ермаков С. В., 67

Ж

Жиренков А. Н., 306

З

Заикин П. В., 238

Звягин А. В., 76

Зиганшин Р. А., 221

И

Иванов Ф. Ф., 254

Иванченко О. В., 140

Игошин Д. Е., 35

Ильин В. П., 181

Исрафилова А. И., 181, 281

К

Киселев А. Б., 90

Конюшенков А. А., 286

Косинов С. Н., 101

Крыганов П. В., 62

Кутрунов В. Н., 181, 281

Кушниренко А. Г., 55

Л

Ладыгин Н. И., 260

Лебедев А. К., 322

Леонов А. Г., 55

Ли Кайжуй, 90

Логвинов О. А., 126

Лужин А. А., 76

Лысенкова С. А., 238, 240

М

Масленникова И. И., 306

Мелкумян Л. А., 126

Михальченко Е. В., 137, 168

Михеев П. В., 286, 322

Моргун Д. А., 188, 217

Мостовой Г. Е., 286

Н

Назин А. Г., 223

Немировский Ю. В., 277

Нестеров А. В., 57

Никитин В. Ф., 101, 115, 125, 137,
147, 168

П

Панфёров С. В., 50

Перегуда А. И., 141

Пестов Д. А., 147, 163

Прищепа И. А., 283

Р

Ряховский А. В., 40, 236

С

Самарина О. В., 204

Саркисов Ю. С., 283

Семенов С. П., 204

Скрылева Е. И., 115, 125

Славгородский С. А., 317

Славский В.В., 204

Смирнов Н. Н., 115, 125

Смирнова М. Н., 101, 147

Снигирева В. А., 295

Соколов С. Б., 206

Стамов Л. И., 139, 168

Т

Тюренкова В. В., 101, 139, 147

У

Усов А. В., 311

Ш

Шамина А. А., 76

Шпильман А. В., 29

Штанов Ю. Н., 221

Штейнберг Ю. М., 62

Я

Якобовский М. В., 34

Ялов П. В., 62

**Международная конференция «Математика и информационные технологии в
нефтегазовом комплексе», посвящённая дню рождения великого русского
математика академика П. Л. Чебышёва**

Труды конференции

Тексты статей печатаются в авторской редакции

Оригинал-макет подготовил Д. А. Моргун

Подписано к печати 15.08.2019. Заказ № 3703
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. 19,3. Уч.-изд. л. 16,5.
Тираж 500 экз.

Издательство
ООО «Порто-принт»
443041, Самара, ул. Садовая, 156

Отпечатано в типографии
ООО «Порто-принт»